[illegible] → ۱۵٪ [illegible] نمره [illegible]
[illegible] → ۱۵٪ [illegible] تحقیق در عملیات
[illegible] → [illegible] تحقیق در عملیات [illegible]

ص ۱

تحقیق در عملیات

[illegible]

Linear Programming and network Flows.
Bazaraa M. & Shetty

تحقیق در عملیات (Operations Research)، بهینه‌سازی (Optimization)، برنامه‌ریزی ریاضی (Mathematical Programming)

operations research یکی از رشته‌های علمی است برای حل مسائلی که تابع هدفی دارند که این تابع هدف باید بهینه شود (ماکزیمم یا مینیمم).

تاریخچه تحقیق در عملیات سه دوره را دارا است:

۱- قبل از جنگ جهانی دوم: خیلی از تکنیک‌های تحقیق در عملیات قبل از جنگ به وجود آمده بودند [illegible] از این تکنیک‌ها [illegible] کنترل کیفیت آماری.

۲- در طول جنگ جهانی دوم: که در آن زمان مسائل پیچیده و [illegible] در طول جنگ [illegible] تحقیق در عملیات [illegible] [illegible] دانشمندان گروهی [illegible] آمدند [illegible] به وجود آمد [illegible] در [illegible] این رشته، تحقیق در عملیات قدرت گرفت.

۳- بعد از جنگ جهانی دوم: دانشمندان [illegible] تحقیق در عملیات [illegible]

۴- عصر کامپیوتر: [illegible] تکنیک‌های تحقیق در عملیات [illegible] کامپیوتر [illegible] [illegible] حل مسائل [illegible] کامپیوتر [illegible] [illegible] تکنیک‌های تحقیق در عملیات [illegible]

۵- [illegible] تحقیق در عملیات [illegible]

[illegible] بهینه‌سازی [illegible] یک تابع هدف [illegible] [illegible] ماکزیمم یا مینیمم [illegible]

[illegible] بهینه‌سازی [illegible] (برنامه‌ریزی)، بهینه‌سازی [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] خطی [illegible]

[illegible] خطی [illegible]

فرم کلی یک مسئله برنامه‌ریزی خطی [illegible]

$$\max / \min \; Z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \longrightarrow \text{تابع هدف}$$

c_j ضرایب تابع هدف

Subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \gtreqless b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \gtreqless b_m$$

شرایط و قیود

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

شرط نامنفی بودن

مسئله تحلیل فعالیت:

کارخانه‌ای را در نظر بگیرید که n نوع کالا را می‌تواند تولید کند که برای تولید انواع کالا، امکانات محدودی دارد. هدف این است که از هر نوع کالا به چه میزان تولید کند تا از امکانات استفاده گردد، تا بیشترین سود را ببرد.

برای فرمول‌بندی این مسئله اطلاعات زیر مشخص شده است:

m = تعداد منابع (انواع مواد اولیه) n = تعداد کالاها (انواع کالا)

a_{ij} = میزان واحدهای لازم از ماده اولیه i برای تولید یک واحد کالای نوع j (از این ورودی‌ها، خروجی‌ها ضریب تکنولوژی را)

b_i = حداکثر میزان واحد موجود از ماده اولیه نوع i

c_j = سود حاصل از یک واحد کالای نوع j

x_j = میزان فعالیت (مقدار تولید) کالای نوع j

کل مقداری که از نوع iامین ماده اولیه (منبع) برای تولید همه انواع کالاها مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت عبارت زیر بیان می‌گردد.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

کل این مقدار را نباید بیشتر باشد از حداکثر میزان موجود از ماده اولیه iام باشد پس از این رو برای iام باید رابطه زیر را داریم:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$$

مجموعه این نامساوی‌ها تشکیل شرایط مسئله را می‌دهند.

تابع هدف مسئله که عبارت است از ماکزیمم سازی سود حاصل از فعالیت‌ها به صورت زیر است

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

در نتیجه شکل کلی مسئله تحلیل فعالیت‌ها به صورت زیر است

$$\max \overset{Z}{f(x)} = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$ تابع هدف

s.t.

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &\vdots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}\right\}$$ شرایط مسئله

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, n$$ شرط نامنفی بودن

x_j متغیرهای تصمیم

مسأله زیر را به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تشکیل کنید.

یک کارخانه نجاری میز، صندلی، میز تحریر و کمد تولید می‌کند. جدول زیر نشان می‌دهد که هر یک از محصولات فوق به چه میزان مواد اولیه و کار نیاز دارند. با فرض اینکه سود حاصل از هر میز 12 تومان و از هر صندلی 5 تومان و از هر میز تحریر 15 تومان و از هر کمد 10 تومان باشد. با توجه به اینکه این کارخانه در هر روز می‌تواند حداکثر 900 متر مربع چوب نوع (1) و 410 متر مربع چوب کاج و 220 ساعت کار در دسترس داشته باشد این کارخانه به چه میزان را تولید کند تا سود حاصل آن حداکثر باشد.

	میز	صندلی	میز تحریر	کمد
چوب نوع (1)	5	1	9	12
« کاج	2	3	4	1
ساعات زمان کار	3	2	5	10

x_1: تعداد میز x_2: تعداد صندلی x_3: تعداد میز تحریر x_4: تعداد کمد

$$\max f(x) = 12x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 10x_4$$

s.t.

$$5x_1 + x_2 + 9x_3 + 12x_4 \leq 900$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 410$$

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 220$$

$$x_j \geq 0$$

۳- مسأله رژیم غذایی:

هر بیمار عفونی برای بهبودی (کرونا) باید شامل زیر را دریافت نماید:

بچه‌ها می‌توانند توسط دو نوع غذا (I و II) که در هر یک واحد استاندارد 50 گرمی عرضه می‌شوند تغذیه شوند. قیمت هر یک از این غذاها به ترتیب 2 و 3 دلار می‌باشد.

ویتامین‌های منتخب در هر نوع غذا و مقدار ویتامین مورد نیاز برای هر ویتامین در جدول زیر آمده است. یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای تعیین ترکیب بهینه غذاها با هزینه کمینه ارائه دهید به طوری که مقدار ویتامین مورد نیاز در روز تأمین شود.

ویتامین \ غذا	I	II	مقدار مورد نیاز
1	1	1	6
2	7	1	14
قیمت هر واحد غذا	2	3	

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$7x_1 + x_2 \geq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- مسائل زیر را طوری که مسائل برنامه ریزی خطی را فرموله نمایید.

دکتری ادعا می‌کند که می‌توان سرماخوردگی را با قرص‌هایی ... درمان کرد. قرص‌ها در دو اندازه موجود هستند: اندازه معمولی شامل ۲ گرم آسپرین، ۵ گرم بی‌کربنات و ۱ گرم کدئین و اندازه بزرگ آن شامل ۱ گرم آسپرین، ۸ گرم بی‌کربنات و ۶ گرم کدئین می‌باشد.

تحقیقات این دکتر او را متقاعد کرده است که حداقل ۱۲ گرم آسپرین، ۷۴ گرم بی‌کربنات و ۲۴ گرم کدئین برای درمان ضروری است.

حداقل قرص‌هایی که باید برای درمان این بیماری به بیمار تجویز شود را تعیین کنید.

x_1: تعداد قرص‌های معمولی

x_2: تعداد قرص‌های بزرگ

$$\min f(x) = x_1 + x_2$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

$$5x_1 + 8x_2 \geq 74$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$

$$x_j \geq 0$$

- مسائل زیر را طوری که مسائل برنامه ریزی خطی فرموله نمایید.

یک کارخانه برای ساختن سنجاق قفلی، از دو دستگاه پرس A، B و همچنین ماشین C استفاده می‌شود. سنجاق در ۴ اندازه با شماره‌های ۱، ۲، ۶، ۸ عرضه می‌شود. جدول زیر زمان مورد نیاز برای تولید یک کارتن از هر یک از انواع سنجاق‌ها را نشان می‌دهد. این جدول همچنین سود حاصل هر کارتن از انواع مختلف و حداکثر زمان موجود برای هر دستگاه را در هر هفته نشان می‌دهد. چند کارتن از هر اندازه باید این کارخانه تولید نماید تا حداکثر سود را به دست آورد.

اندازه سنجاق	ماشین A	ماشین B	ماشین C	سود هر کارتن
۱	۱۰	۶	۴.۵	۹
۲	۵	۶	۱۸	۷
6	2	2	1.5	۶
۸	۱	۳	۶	۴
حداکثر ساعت کار	۵۰	۳۶	۸۱	

x_1: تعداد کارتن سنجاق شماره ۱

x_2

x_3

x_4

$$\max Z = 9x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s.t.

$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 50$$

$$\leq 36$$

$$\leq 81$$

2

c_j : $j=1,\dots,n$

b_i : $i=1,\dots,m$ ، a_{ij} ، ضرایب ثابت مسئله

مثال‌هایی از مسایل برنامه ریزی خطی:

۲- مسئله حمل و نقل: یک کالای خاص را در m انبار داریم که می‌خواهیم به n مقصد حمل کنیم. می‌دانیم که در هر انبار a مقدار از این کالای خاص موجود است و همچنین می‌دانیم که هر فروشگاه هم مقدار b از این کالای خاص نیاز دارد. هدف این است که با رعایت شرایط مسئله، راه‌کاری پیدا کنیم که کمترین هزینه را متحمل شویم.

تعداد مبداء (انبار، منبع) = m

" مقصد (فروشگاه) = n

مقدار کل کالای موجود در محل انبار i‌ام = a_i

" " مورد نیاز فروشگاه j‌ام = b_j

مقدار کالای حمل شده از انبار i‌ام به فروشگاه j‌ام = x_{ij} ؛ $x_{ij} \geq 0$

هزینه حمل یک واحد کالا از انبار i‌ام " " " = c_{ij}

محدودیت‌ها در حالت کلی نوشته خواهد شد به صورت زیر است:

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} \leq a_i \qquad i=1,2,\dots,m$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} \geq b_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

تابع هدف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

در حالتی که $m=2$ ، $n=3$ باشد مسئله را حل می‌کنیم:

$$\min f(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} \qquad\qquad\qquad\qquad & = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & = a_2 \\ x_{11} \qquad + x_{21} \qquad\qquad & = b_1 \\ x_{12} \qquad + x_{22} \qquad & = b_2 \\ x_{13} \qquad + x_{23} & = b_3 \end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0$

$i=1,2$

$j=1,2,3$

۴- مسئله ضایعات برش:

یک کارخانه کاغذسازی سفارش‌هایی برای تهیه رول‌هایی از کاغذ که طول و عرض آن در جدول زیر داده شده است دریافت کرده است. در این کارخانه رول‌های کاغذ در دو عرض استاندارد ۱۰ دسی‌متری و ۲۰ دسی‌متری تولید می‌شوند. این رول‌ها را به اندازه سفارش‌های دریافت شده برش می‌دهند. از نظر طول رول‌های استاندارد محدودیتی وجود ندارد. مطلوب است تعیین برنامه برش به گونه‌ای که ضایعات حاصل از برش حداقل شود، قطعه‌های مورد نیاز را به دست آورده باشند.

شماره سفارش	عرض (دسی‌متر)	طول (دسی‌متر)
۱	۵	۱۰۰۰۰
۲	۷	۳۰۰۰۰
۳	۹	۲۰۰۰۰

x_{ij}: طول رول i ام که با الگوی برش j ام برش داده می‌شود

$i=1$; $j=1,2,3$

$i=2$; $j=1,2,\dots,6$

$i=1$ (۱۰ دسی‌متری)

عرض سفارش	$j=1$	$j=2$	$j=3$
۵	۲	۰	۰
۷	۰	۱	۰
۹	۰	۰	۱
ضایعات	۰	۳	۱

$i=2$ (۲۰ دسی‌متری)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
۵	۴	۲	۲	۱	۰	۰
۷	۰	۱	۰	۲	۱	۰
۹	۰	۰	۱	۰	۱	۲
ضایعات	۰	۳	۱	۱	۴	۲

$$\min z = 3x_{12} + x_{13} + 3x_{22} + x_{23} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{26}$$

s.t.

$$2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + x_{24} \geq 10000$$

$$x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} \geq 30000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{25} + 2x_{26} \geq 20000$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\min z = 3x_{12} + \dots + 2x_{26} + 5S_1 + 7S_2 + 9S_3$$

$$\text{———} - S_1 = 10000$$

$$- S_2 = 30000$$

$$- S_3 = 20000$$

6

فصل ۲ – ...

بردارهای مستقل خطی:

مستقل خطی

هرگاه دسته بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را مستقل خطی گوییم هرگاه به ازای کلیه اعداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از تساوی

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

نتیجه شود

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

ترکیب خطی / وابسته خطی / ...

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \alpha_i = 0$$

فضای اقلیدسی E_n:

E_2

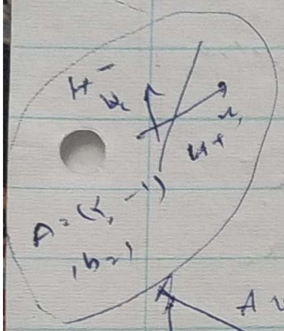
هر معادله خطی در فضای دوبعدی نمایش یک خط در صفحه است

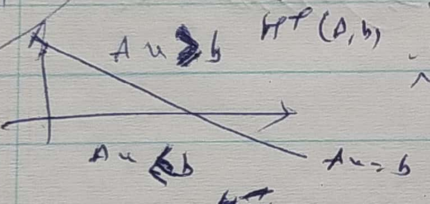
〃 〃 〃 〃 سه بعدی 〃 〃 صفحه $\{u \mid A.u \geq b\}$

〃 〃 〃 〃 n بعدی 〃 〃 ابر صفحه. $H^+(A,b)$

هر ابر صفحه فضای n بعدی را به دو نیم فضا تقسیم می کند

(هر ابر صفحه $H(A,b)$ را مجموعه همه بردارهای ... $A \neq 0$ ... $A.U = b$ باشد)





$H^-(A,b)$

$\{u \mid Au \leq b\}$

فضای اقلیدسی n بعدی را با E_n نمایش می دهیم.

هر دسته از n بردار مستقل خطی در E_n ... هر بردار دیگر را در E_n به صورت ترکیب خطی ...

هر بردار را به صورت

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n)$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

هر مجموعه از n بردار مستقل خطی، تشکیل یک پایه برای E_n می دهند

– هر بردار در E_n را می توان به طور یکتا به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت. ... مثال

مجموعه n بردار $(1,0,\dots,0)$، $(0,1,0,\dots,0)$، ...، $(0,0,\dots,1)$ یک پایه برای E_n است.

– اگر یک مجموعه بردار مستقل خطی باشند آنگاه هر زیر مجموعه از این بردارها نیز مستقل خطی است.

– اگر یک مجموعه بردار وابسته خطی باشند آنگاه هر مجموعه که شامل این مجموعه بردارها باشد نیز وابسته خطی است.

مجموعه های محدب:

یک ترکیب محدب از نقاط $u_1 , u_2 , \ldots , u_n$ نقطه‌ای است مانند

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

مشروط بر آنکه $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

مانند C

مجموعه محدب: یک مجموعه مانند C از E^n محدب است اگر برای هر دو نقطه دلخواه u_1 و u_2 از C، هر ترکیب محدب مانند $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ نیز در C باشد.

ثابت کنید که اگر C یک مجموعه محدب باشد، هر ترکیب محدب از سه نقطه از C نیز در C واقع است.

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \qquad u_i \in C , \ \alpha_i \geq 0 , \ \sum \alpha_i = 1$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} u \in C$$

$$u = (\alpha_1 + \alpha_2)\underbrace{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} u_2\right)}_{u_4 \in C} + \alpha_3 u_3$$

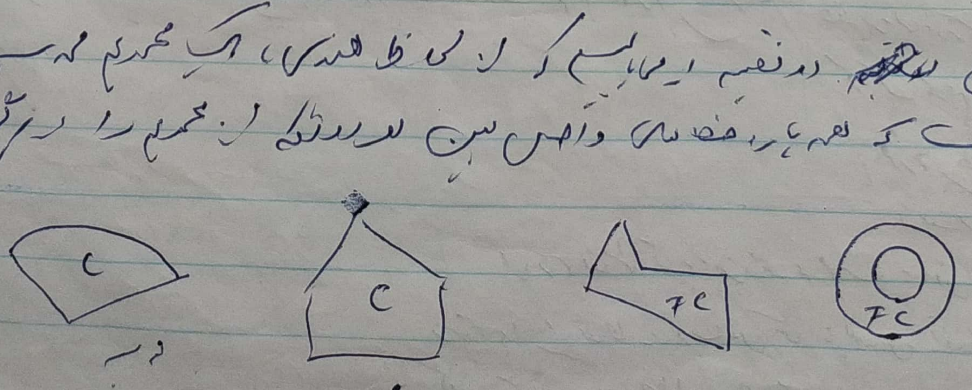
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) u_4 + \alpha_3 u_3 \in C$$

برای n نقطه با استقراء قابل تعمیم است

قضیه: هر نقطه داخل یا روی پاره‌خط واصل بین دو نقطه را می‌توان به صورت ترکیب محدب آن دو نقطه بیان کرد.

قضیه عکس: هر نقطه که می‌تواند به صورت ترکیب محدب از دو نقطه در E^n بیان شود روی پاره‌خط واصل بین این دو نقطه قرار دارد.

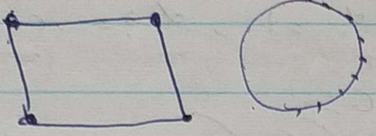
بر طبق این دو قضیه (همانطور که در کلاس گفتیم)، یک مجموعه محدب، مجموعه‌ای است که همه پاره‌خط‌های واصل بین هر دو نقطه از مجموعه را در برگیرد.



نقطه‌ی فرین:

نقطه‌ی مانند x در یک مجموعه‌ی محدب مانند C نقطه‌ی فرین (extreme point) نامیده می‌شود اگر x را نتوان به صورت ترکیب محدب اکید دو نقطه‌ی دیگر از C بیان کرد.

نقاط گوشه، نقاط فرین



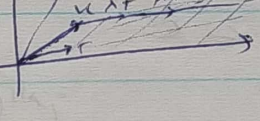
در اینجا همه‌ی نقاط مرزی را شامل شده، اما نقطه‌ی فرین ندارد.

پوسته‌ی محدب Hull Convex

پوسته‌ی محدب مجموعه‌ی متناهی از نقاط مانند S، مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات محدب نقاط S است. C(S) کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدبی است که S را در بر می‌گیرد. مثلاً اگر S شامل ۸ رأس یک مکعب باشد آنگاه C(S) آن مکعب خواهد بود، یا مثلاً اگر S محیط یک دایره باشد آنگاه C(S) آن دایره است.

مجموعه‌ی مخروطی:

یک مجموعه‌ی محدب مانند C یک مخروط نامیده می‌شود اگر به ازای هر نقطه مانند x در C و هر $\lambda \geq 0$ بتوان نشان داد λx نیز متعلق به C است.



(همه‌ی C دارای یک جهت T است)

~~[illegible]~~ برنامه‌ریزی خطی: مسئله‌ای که شامل بهینه‌سازی یک تابع خطی تحت یک مجموعه قیود خطی است ... [illegible] یک مجموعه از نقاط که با [illegible] نشان داده می‌شوند ... [illegible]

[illegible]

[illegible]

نقاط فرین [illegible]

[illegible] ... به صورت [illegible]

[illegible] برنامه‌ریزی خطی ... [illegible] ... یک مجموعه‌ی محدب ... [illegible] ... قیدهای خطی [illegible] ۹ [illegible]

[illegible]

[illegible] نقاط که [illegible] مجموعه‌ی محدب [illegible]

[illegible] نقاط [illegible]

[illegible] نقاط [illegible] مجموعه [illegible] حل [illegible] دارد.

روش ترسیمی :

مثال :

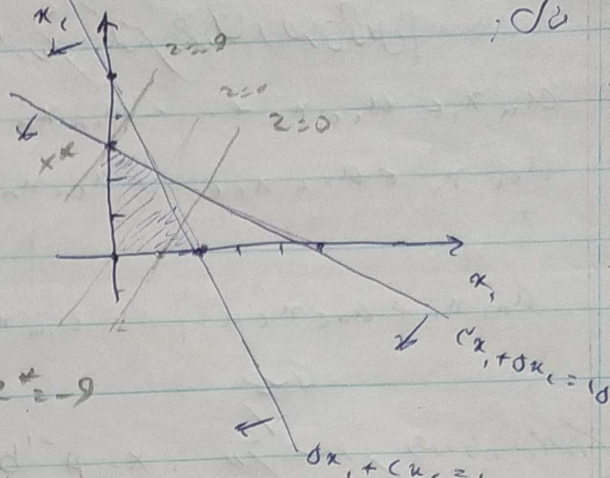
$\min Z = 5x_1 - 3x_2$

s.t.

$3x_1 + 5x_2 \le 15$

$5x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1, x_2 \ge 0$



$x^* = (0, 3)$, $z^* = -9$

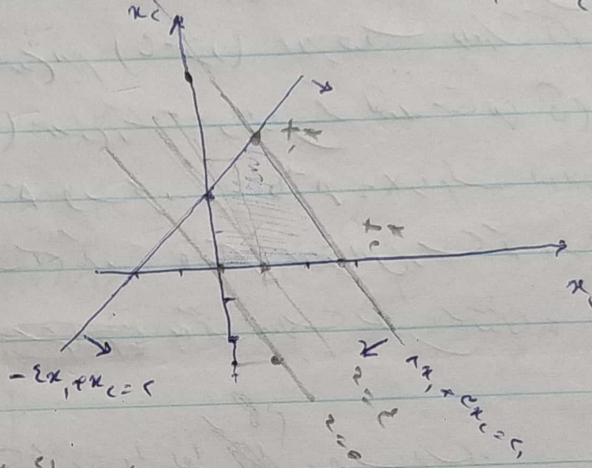
$\max Z = 4x_1 + \frac{3}{2} x_2$

s.t.

$-4x_1 + x_2 \le 2$

$8x_1 + 3x_2 \le 21$

$x_j \ge 0$



$x_1^* = (3/4, 5)$, $x_2^* = (\frac{21}{8}, 0)$

$z^* = \frac{21}{2}$

$x^* \begin{cases} x_1^* = \lambda \times 3/4 + (1-\lambda)\frac{21}{8} \\ x_2^* = \lambda \times 5 \end{cases}$ $0 \le \lambda \le 1$

جواب بهینه چندگانه دارد.

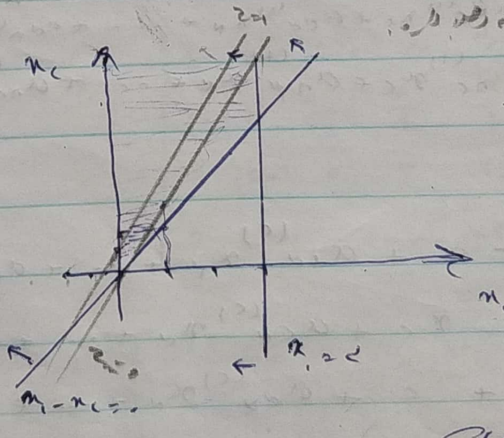
$\max Z = -3x_1 + 2x_2$

s.t.

$x_1 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 0$

$x_j \ge 0$



جواب بیکران هم دارد.

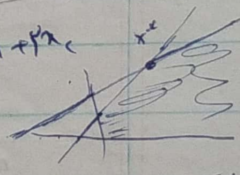
$\max Z = -x_1 + 3x_2$

s.t.

$x_1 - x_2 \ge -1$

$-x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$



$x_1 - x_2 = -1$

$x^* = \lambda \times$

جواب بهینه منحصر بفرد داریم ولی بیکران

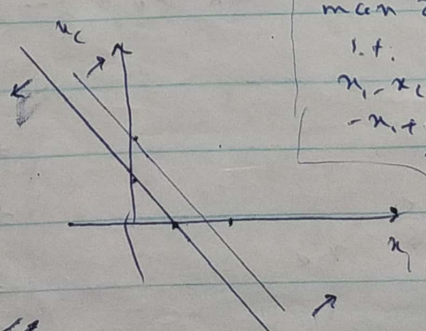
$\min Z = 3x_1 - 2x_2$

s.t.

$x_1 + x_2 \le 1$

$2x_1 + 2x_2 \ge 4$

$x_j \ge 0$



جواب ندارد.

— حل یک دستگاه n معادله و n مجهول با استفاده از روش گوس-جردن (حذفی کامل)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$AX = b$$

اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ و وارون‌پذیر باشد

آنگاه جواب به صورت یکتا است $X = A^{-1}b$. روش‌های مستقیم معمولاً بسیاری وجود دارد که محاسبات

با توجه به اینکه بیشتر دستگاه‌ها وارون‌پذیر (ناصفر) [illegible] به صورت [illegible] این

روش‌ها روش حذفی کامل (گوس-جردن) معروف است و داریم [illegible] مراحل گام به گام [illegible]

در این روش دستگاه $Ax=b$ ما به [illegible] A^{-1} [illegible] $X = A^{-1}b$ [illegible]

ضمناً می‌توان هم‌زمان A^{-1} را نیز محاسبه کرد. اساس روش این است که دستگاه [illegible]

به یک دستگاه [illegible] تبدیل می‌کند ~~[illegible]~~ [illegible] .

در هر گام یک متغیر از کلیه معادلات به جز معادله [illegible] گام حذف می‌شود.

گام اول:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$
$$0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$
$$0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}$$
$$\vdots$$
$$0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}$$

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad j = 2, \ldots, n, n+1$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} \cdot a_{1j}^{(1)}$$
$$i \neq 1, \quad j = 2, \ldots, n, n+1$$

گام دوم

$$x_1 + 0 + a_{13}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)}$$
$$0 + x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$
$$0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}$$
$$\vdots$$
$$0 + 0 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}$$

$j = 3, \ldots, n, n+1$

محور

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot a_{2j}^{(2)}$$

$i \neq 2$ سطر اول

$j = 3, \ldots, n, n+1$

گام n-ام

$$x_1 = b_1^{(n)}$$
$$x_2 = b_2^{(n)}$$
$$x_3 = b_3^{(n)}$$
$$\vdots$$
$$x_n = b_n^{(n)}$$

$$a_{nj}^{(n)} = \frac{a_{nj}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \quad j = n+1$$

$$a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} - a_{in}^{(n-1)} \cdot a_{nj}^{(n)}$$

$i \neq n \; ; \; j = n+1$

تعمیم فرمول های حذف مرحله k-ام عبارتند از:

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \qquad j = k+1, \dots, n, n+1$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} \qquad i \neq k, \quad j = k+1, \dots, n, n+1$$

مثال: دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس جردن حل کنید

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 16 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

حل: ماتریس افزوده را تشکیل داده و عملیات حذفی را [illegible] این ماتریس اعمال می‌کنیم [illegible] ... تا به یک ماتریس واحد تبدیل شود

عنصر لولا

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -4 & 6 & 22 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & -8 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

سطر لولا

ستون لولا

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & -2-2 & 1+2 & -2-3 & -8-11 \\ 0 & -2-2 & 1+2 & 4-3 & 16-11 \\ 0 & 6-2 & -3+2 & 1-3 & 8-11 \end{array}\right] \xrightarrow{k=2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -22 \end{array}\right]$$

تعویض سطر ۳ و ۴

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 & 19/4 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{array}\right] \xrightarrow{k=3} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -8/2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{8} & -14/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{array}\right]$$

$$k=4 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{array}$$

$$\det(A) = (-1)^1 \times 2 \times (-4) \times 2 \times 6 = 96$$

$$\det = \prod \text{عنصر لولا} \times (-1)^{\text{تعداد تعویض سطرها}}$$

$$\det(A) = (-1)^{p} \cdot a_{11}^{(0)} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n-1)}$$

p برابر است با تعداد دفعات تعویض سطرها.

برای بدست آوردن ماتریس معکوس، ماتریس افزوده را به شکل زیر تشکیل می‌کنیم

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{تعداد: } n \text{ مرحله}} [I \mid A^{-1}]$$

مثال: دترمینان و معکوس ماتریس B را بدست آورید

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$k=1 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$k=2 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & 3/2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$k=3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -2/3 & 1 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$k=4 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B^{-1}}$$

دقت در انتخاب لولا: اگر عنصر لولا کوچک باشد ابتدا عنصر لولا را عوض کنید تا خطا کم شود

$$\det(B) = (-1)^{0} \times 2 \times 1 \times 3/2 \times 1/3 = 1$$

تعیین معکوس یک ماتریس از روی معکوس ماتریس دیگری که با آن در یک ستون اختلاف دارد:

- فرض کنید ماتریس B، وارون آن یعنی B^{-1} معلوم است. می‌خواهیم وارون ماتریس B_a که فقط در یک ستون با ماتریس B تفاوت دارد، را بدست آوریم.

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_l, \dots, b_n) \quad , \quad B^{-1} \text{ معلوم}$$

$$B_a : (b_1, b_2, \dots, a, \dots b_n) \qquad B_a^{-1} = ?$$

چون B^{-1} معلوم است پس ستونهای ماتریس B مستقل خطی هستند لذا می‌توان آنها را یک پایه در نظر گرفت و می‌توان بردار a را به صورت ترکیب خطی از این پایه نمایش داد.

$$a = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = BY = (b_1\ b_2 \dots b_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}a = B^{-1}BY \Longrightarrow \boxed{Y = B^{-1}a}$$

$$a = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_l b_l + \dots + y_n b_n \quad ; \quad y_l \neq 0$$

اگر $y_l = 0$ باشد نتیجه می‌شود که $a, b_1, b_2, \dots, b_n$ وابسته خطی هستند لذا B_a^{-1} وجود نخواهد داشت. از این رو فرض می‌کنیم که $y_l \neq 0$.

$$b_l = -\frac{y_1}{y_l} b_1 - \frac{y_2}{y_l} b_2 - \dots + \frac{1}{y_l} a - \dots - \frac{y_n}{y_l} b_n = B_a \cdot \eta$$

مؤلفه l ام

$$\eta = \left[-\frac{y_1}{y_l}, -\frac{y_2}{y_l}, \dots, \frac{1}{y_l}, \dots, \frac{-y_n}{y_l} \right]'$$

$$B = B_a \cdot \underbrace{(e_1, e_2, \dots, e_{l-1}, \eta, e_{l+1}, \dots, e_n)}_{E_l}$$

$$B_a \Rightarrow (b_1, b_2, \dots, a, \dots, b_n)\begin{pmatrix} \vdots \\ ? \end{pmatrix} = b_l$$

$$E_l = (e_1, e_2, \dots, e_{l-1}, \eta, e_{l+1}, \dots, e_n)$$

$$B = B_a \cdot E_l \Rightarrow BB^{-1} = B_a \cdot E_l \cdot B^{-1} \Rightarrow I = B_a \cdot E_l B^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_a^{-1} = E_l \cdot B^{-1}}$$

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

(1) $y = B^{-1} \cdot a \rightarrow \eta \rightarrow E_l$ (ماتریس واحد) ماتریس همانی با ستون l ام η

$B_a^{-1} = E_l \cdot B^{-1} \leftarrow$ آن را به جای η گذاشته

$l = 2$

$$y = B^{-1} a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2 \\ \leftarrow y_3 \\ \leftarrow y_4 \end{array}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} -y_1/y_2 \\ \dfrac{1}{y_2} \\ -y_3/y_2 \\ -y_4/y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = E_2 \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1/2 & 4/2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -4/2 & 4/2 \end{bmatrix}$$

معکوس یک ماتریس با استفاده از فرم حاصلضرب معکوس

$$A \longrightarrow A^{-1}$$

$$B_0 = I \longrightarrow B_0^{-1} = I$$

$$B_1 = (a_1, e_2, \dots, e_n) \rightarrow y_1 = B_0^{-1} \cdot a_1 \rightarrow \eta_1 \rightarrow E_1 = (\eta_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$B_1^{-1} = E_1 B_0^{-1}$$

$$B_2 = (a_1, a_2, e_3, \dots, e_n) \rightarrow y_2 = B_1^{-1} a_2 \rightarrow \eta_2 \rightarrow E_2 \rightarrow B_2^{-1} = E_2 B_1^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A = B_n = [a_1, a_2, \dots, a_n] \rightarrow y_n = B_{n-1}^{-1} a_n \rightarrow \eta_n \rightarrow E_n \rightarrow B_n^{-1} = A^{-1} = E_n B_{n-1}^{-1}$$

$$A^{-1} = B_n^{-1} = E_n B_{n-1}^{-1} = E_n E_{n-1} B_{n-2}^{-1} = \dots = E_n E_{n-1} E_{n-2} \dots E_2 E_1$$

اگر مجبور به تعویض شدیم (جای ۲ ستون عوض شود) کافیست با ماتریس معکوس باشیم جای دو سطر را تغییر و معکوس کنیم

15

مثال: معکوس A را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}3&6&3&3\\2&4&4&2\\3&6&6&1\\1&1&2&4\end{bmatrix}$$

$$B_0=I\longrightarrow B_0^{-1}=I$$

$$B_1=[a_1,e_2,e_3,e_4]\rightarrow y_1=B_0^{-1}a_1=I\begin{bmatrix}3\\2\\3\\1\end{bmatrix}\longrightarrow \eta_1=\begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\-1\\-1/3\end{bmatrix}$$

$$E_1=\begin{bmatrix}1/3&0&0&0\\-2/3&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1/3&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow B_1^{-1}=E_1B_0^{-1}=E_1$$

$$B_2=[a_1,a_2,e_3,e_4]\rightarrow y_2=B_1^{-1}a_2=E_1a_2=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\rightarrow$$ عنصر محوری صفر است

لذا ما ستون سوم را جایگزین می‌کنیم (یعنی a_3 را به جای a_2 در B_2 قرار می‌دهیم)

$$y_2=B_1^{-1}\cdot a'_2=E_1\begin{bmatrix}3\\4\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}\longrightarrow \eta_2=\begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\-3/2\\-1/2\end{bmatrix}\longrightarrow E_2=\begin{bmatrix}1&-1/2&0&0\\0&1/2&0&0\\0&-3/2&1&0\\0&-1/2&0&1\end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1}=E_2B_1^{-1}=\begin{bmatrix}2/3&-1/2&0&0\\-1/3&1/2&0&0\\0&-3/2&1&0\\0&-1/2&0&1\end{bmatrix}$$

$$B_3=[a_1,a_3,a_2,e_4]\rightarrow y_3=B_2^{-1}\cdot a'_3=B_2^{-1}\cdot a_2=B_2^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

صفر است. لذا ما ستون سوم را جایگزین می‌کنیم (یعنی a_4 را به جای a_2 در B_3 قرار می‌دهیم).

$$B_3=(a_1,a_3,a_4,e_4)\qquad y_3=B_2^{-1}\cdot a''_3=B_2^{-1}\cdot a_4=B_2^{-1}\begin{bmatrix}3\\2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$\eta_3=\begin{bmatrix}1/2\\0\\-1/2\\3/2\end{bmatrix}\rightarrow E_3=\begin{bmatrix}1&0&1/2&0\\0&1&0&0\\0&0&-1/2&0\\0&0&3/2&1\end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1}=E_3B_2^{-1}=\begin{bmatrix}2/3&-5/4&1/2&0\\-1/3&1/2&0&0\\0&3/4&-1/2&0\\0&-11/4&3/2&1\end{bmatrix}$$

$$B_4=(a_1,a_3,a_4,a_2)\rightarrow y_4=B_3^{-1}\cdot a'_4=B_3^{-1}\cdot a_2=B_3^{-1}\begin{bmatrix}6\\4\\6\\1\end{bmatrix}$$

$$y_4=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\longrightarrow \eta_4=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\longrightarrow E_4=\left(e_1,e_2,e_3,\begin{matrix}2\\0\\0\\-1\end{matrix}\right)$$

$$B_4^{-1} = E_4 B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{2} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس، معکوس ماتریس A نمی‌باشد چون دوبار مجبور به تعویض جای سطرها شدیم

لذا باید به ترتیب عکس، جای سطرهای نظیر ستون‌های تعویضی را در این ماتریس عوض کنیم تا معکوس A بدست آید.

$$\xrightarrow{\text{تعویض سطر ۳ و ۴}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{2} & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعویض سطر ۲ و ۳}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{4} & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = A^{-1} \quad \blacktriangle$$

- اشکال مسئله برنامه‌ریزی خطی

فرم کلی

$$\underset{\min}{\max}\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} b_m$$

فرم استاندارد مسئله برنامه‌ریزی خطی

$$\min f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_j \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

فرض کنید $\overset{\max}{\cancel{\min}} f(x) = f(x^*)$ آنگاه

$$f(x^*) \overset{\geq}{\leq} f(x) \quad \forall x$$

$$-f(x^*) \overset{\leq}{\geq} -f(x) \quad \forall x \Rightarrow -f(x^*) = \overset{\min}{\cancel{\max}}(-f(x))$$

$$\Rightarrow f(x^*) = -\overset{\min}{\cancel{\max}}(-f(x))$$

$$\overset{\max}{\cancel{\min}} f(x) = -\overset{\min}{\cancel{\max}}(-f(x)) = -\overset{\min}{\cancel{\max}}(-cx) = -\overset{\min}{\cancel{\max}}((-c)x)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad x_{n+1} \geq 0$$

متغیر کمبود

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \qquad x_{n+1} \geq 0$$

متغیر مازاد.

- متغیرهایی که علامت نامنفی ندارند، اگر $x_j \leq 0$ باشد کافی است متغیر $x'_j = -x_j$ را در نظر بگیریم $x'_j \geq 0$

- اگر x_j نامقید باشد، متغیر منفی را به صورت تفاضل دو متغیر نامنفی می‌نویسیم

$$x_j = x'_j - x''_j \qquad x'_j , x''_j \geq 0$$

- اگر b_i منفی بود، طرفین محدودیت i ام را در منفی یک ضرب می‌کنیم تا $b_i \geq 0$ شود.

فرم ماتریسی مسئله برنامه‌ریزی خطی به شکل زیر است

$$\min f(x) = CX \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)_{1\times n} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

s.t.

(1) $AX = b$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

(2) $X \geq 0$

کلیه این فرم‌ها به شکل زیر قابل نمایش است.

$$\min f(x) = CX$$

s.t.

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$\min f(x) = CX$$

s.t.

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0$$

P_j ستون j ام ماتریس A است

$j = 1, \ldots, n$

$P_0 = b$

تعریف ۱: هر جواب شدنی مسئله برنامه‌ریزی خطی را، ... است نقطه $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که در شرایط ۱ و ۲ صدق کند.

تعریف ۲: اگر جواب شدنی ... جوابی است که از ... صفر قرار دادن $n-m$ متغیر و حل دستگاه برای m متغیر باقیمانده ... که ستون‌های ... این m متغیر مستقل خطی باشند. که این m متغیر، متغیرهای اساسی می‌شوند

تعریف: یک جواب قابل قبول پایه‌ای ناتباهیده است اگر جواب قابل قبول پایه‌ای است که دقیقاً m مولفه آن مثبت باشد.

تعریف: یک جواب قابل قبول کمینه، جواب قابل قبولی است که تابع هدف را کمینه کند.

قضیه: مجموعه همه جواب‌های قابل قبول یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، یک مجموعه محدب است.

$Ax=b$, $x\geq 0$ → ? مجموعه جواب محدب است $\underline{K}$

اگر $x_1 \in K$ ، $x_2 \in K$ باید نشان دهیم که

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K$ برای هر $0 \leq \lambda \leq 1$

فرض می‌کنیم $x_1 \in K$ لذا

$Ax_1 = b$

$x_1 \geq 0$

و $x_2 \in K$

$Ax_2 = b$

$x_2 \geq 0$

باید نشان دهیم

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K$

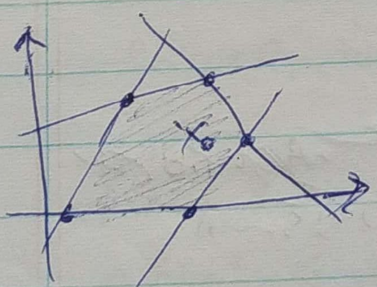
واضح است که $x \geq 0$ و همچنین

$$Ax = A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A x_2 = \lambda b + (1-\lambda) b = b$$

▲

قضیه: تابع هدف یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، در یک نقطه رأسی مجموعه محدب K مینیمم (اکسترمم) می‌شود. مجموعه جواب‌های قابل قبول یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قابل کمینه می‌شود. اگر در بیش از یک نقطه کمینه شود، هر ترکیب محدب آن نقطه‌ها، جواب کمینه است.

اثبات: چون فرض کردیم K (مجموعه جواب‌های قابل قبول) یک مجموعه محدب است پس K دارای تعداد متناهی نقاط رأسی است. K نقطه‌ای ... شکل ...



تابع هدف را $f(x)$ ، نقاط رأسی را x_1 ، x_2 ، ... ، x_p و جواب کمینه را x_0 نشان می‌دهیم

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K$$

اگر x_0 رأسی باشد که حکم ثابت است، در غیر اینصورت (از الف) که x_0 رأسی نباشد، لذا می‌توان x_0 را بصورت ترکیب محدب از نقاط رأسی نوشت.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \,, \quad \alpha_i \geq 0 \,, \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

چون f آفین است

$$f(x_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \bar{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\bar{x}_i) = \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \cdots + \alpha_p f(\bar{x}_p) = m$$

که در آن m کمینه $f(x)$ بر روی نقاط رأسی X می‌باشد.

فرض کنید $f(\bar{x}_m) = \min f(\bar{x}_i)$

$$f(x_0) \geq \alpha_1 f(\bar{x}_m) + \alpha_2 f(\bar{x}_m) + \cdots + \alpha_p f(\bar{x}_m) = f(\bar{x}_m)$$

از طرفی طبق فرض $[\, f(x_0) \leq f(x) \;\; \forall x \in X \,]$ لذا

$$f(x_0) \leq f(\bar{x}_m)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(\bar{x}_m) = m$$

پس حداقل یک نقطه رأسی $\bar{x}_m$ وجود دارد که تابع هدف در آن مقدار کمینه خود را اختیار می‌کند.

برای اثبات قسمت (ب) قضیه، فرض کنید $f(x)$ در بیش از یک نقطه رأسی مانند $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q$ کمینه خود را اختیار کند یعنی داشته باشیم

$$f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = \cdots = f(\bar{x}_q) = m$$

اگر x هر ترکیب محدب دلخواه از $\bar{x}_i$ها فرض شده باشد یعنی

$$x = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \bar{x}_i, \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1$$

آنگاه داریم

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \beta_i \bar{x}_i\right) = \beta_1 f(\bar{x}_1) + \beta_2 f(\bar{x}_2) + \cdots + \beta_q f(\bar{x}_q)$$

$$= \beta_1 m + \beta_2 m + \cdots + \beta_q m = m$$

در این صورت اثبات قضیه کامل می‌شود.

و اثبات قسمت (ج) به روش مشابه برای حالت بیشینه‌سازی نیز اثبات می‌شود.

~~...~~ الگوریتم این قضیه از تعیین همه رئوس ناحیه شدنی کمینه مسئله را که نقاط آن مشخص‌اند، ما نقطه K رأس را اختیار می‌کنیم.

فرض کنیم که حدود ناحیه شدنی برنامه‌ریزی خطی است داریم $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ با قیود مسئله $x_j \geq 0$ نامنفی

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = p_0$$

فرض کنید که دست‌کم k مؤلفه را صفر نیست یعنی k از آن مستقل خطی بوده و ترکیب خطی آنها برابر p_0 باشد. فرض کنید که این بردارها عبارتند از $p_1, p_2, \ldots, p_k$

در این صورت ...

قضیه: اگر یک دسته از K بردار $P_1, P_2, \ldots, P_k$ که $K \le m$ تعداد یک به یک مستقل خطی باشند و داشته باشیم $x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_kP_k = P_0$ و همه $x_j \ge 0$ آنگاه $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ یک نقطه رأسی مجموعه محدب جوابهای ممکن قابل قبول است.

اثبات: فرض کنید X یک نقطه رأسی نباشد، آنگاه چون X یک جواب ممکن قابل قبول است می‌توان آن را به صورت ترکیب محدب از دو نقطه دیگر X_1 و X_2 نوشت

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \quad ; \quad 0<\alpha<1$$

چون همه مؤلفه‌های $n-k$ آخر X برابر صفرند $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$ و $0<\alpha<1$ است، پس $n-k$ مؤلفه آخر X_1 و X_2 نیز باید برابر صفر باشند یعنی X_1 و X_2 به صورت زیر می‌باشند:

$$X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, 0, \ldots, 0)$$
$$X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, 0, \ldots, 0)$$

چون $X_1, X_2 \in K$

$$x_1^{(1)}P_1 + x_2^{(1)}P_2 + \cdots + x_k^{(1)}P_k = P_0$$
$$x_1^{(2)}P_1 + x_2^{(2)}P_2 + \cdots + x_k^{(2)}P_k = P_0$$

اما $P_1, P_2, \ldots, P_k$ مستقل خطی فرض شده‌اند و ثابت کردیم که هر بردار را فقط به یک طریق می‌توان نوشت، لذا P_0 را به صورت یک ترکیب خطی منحصر بفرد از $P_1, P_2, \ldots, P_k$ می‌توان نوشت، لذا نتیجه می‌شود که $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = x_j \; ; \; j=1, \ldots, k$ است.

پس X را نمی‌توان به صورت ترکیب محدب دو نقطه دیگر در K نوشت، پس X رأسی است.

قضیه: اگر $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک نقطه رأسی K باشد، آنگاه بردارهای مربوط به مؤلفه‌های مثبت x_j تشکیل یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی می‌دهند. از این نتیجه می‌شود که حداکثر m تا از x_j ها مثبت هستند.

اثبات: فرض کنید $X \in K$ لذا $x_1P_1 + x_2P_2 + \cdots + x_nP_n = P_0$

(1) $x_1P_1 + \cdots + x_kP_k = P_0$ فرض کنید k مؤلفه اول X، مؤلفه‌های مثبت باشند، در این صورت

فرض کنید $P_1, P_2, \ldots, P_k$ وابسته خطی باشند، آنگاه یک ترکیب خطی از این بردارها وجود دارد که برابر صفر است

(2) $d_1P_1 + d_2P_2 + \cdots + d_kP_k = 0 \quad \exists d_i \ne 0$

که حداقل یکی از d_i ها ناصفر است

عدد مثبت کوچکی مانند δ را در نظر می‌گیریم، (2) را در δ ضرب کرده و نتیجه را با (1) یک بار جمع و یک بار از آن کم می‌کنیم.

$$(x_1+\delta d_1)P_1+(x_2+\delta d_2)P_2+\dots+(x_k+\delta d_k)P_k=P_0$$

$$(x_1-\delta d_1)P_1+(x_2-\delta d_2)P_2+\dots+(x_k-\delta d_k)P_k=P_0$$

اکنون دو جواب زیر را داریم:

$$X_1=(x_1+\delta d_1,\ x_2+\delta d_2,\ \dots,\ x_k+\delta d_k,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

$$X_2=(x_1-\delta d_1,\ x_2-\delta d_2,\ \dots,\ x_k-\delta d_k,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

چون همه مقادیر x_iها مثبت هستند، δ را به قدری کوچک انتخاب می‌کنیم که k مؤلفه اول X_1 و X_2 مثبت باشند. در این صورت X_1 و X_2 جواب‌های شدنی [illegible] هستند و داریم: $X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ و این با فرض رأسی بودن X متناقض است.
لذا فرض خلف باطل و P_1 تا P_k مستقل خطی هستند.
چون هر مجموعه از $m+1$ بردار در فضای m بعدی وابسته خطی است پس k نمی‌تواند بیشتر از m باشد. پس X حداکثر m مؤلفه مثبت دارد. در غیر این صورت [illegible] باید بردارهایی مانند $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}$ وجود داشته باشند که مستقل خطی باشند.

— به این ترتیب اگر [illegible] مسئله [illegible] تعداد [illegible] که مجموعه بردارهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ [illegible] شامل [illegible] از m بردار مستقل خطی است [illegible] اگر [illegible] همه [illegible] این حالت [illegible] می‌توان با مجموعه [illegible] m بردار مستقل خطی اضافه کرد و [illegible] جواب مسئله [illegible]. این موضوع در فصل‌های بعد به تفصیل مطالعه خواهد شد.

از قضایای فوق نتیجه می‌گیریم که:

۱- یک نقطه رأسی در K وجود دارد که [illegible] نقطه [illegible] کمینه خود را [illegible]

۲- تعداد [illegible] نقاط رأسی [illegible] مجموعه K متناهی است.

۳- [illegible] K [illegible] m بردار مستقل خطی از مجموعه n بردار [illegible]

۴- از مطالب فوق نتیجه می‌شود که [illegible] نقاط رأسی [illegible] کافی است

چون فرض کرده‌ایم مسئله m بردار مستقل خطی را در بر دارد، جواب
ممکن است $\binom{n}{m}$ دسته از m بردار مستقل خطی از مجموعه n بردار متفاوت معلوم باشد. $\left(\frac{n!}{m!(n-m)!}\right)$ که
برای هر کدام یک جواب پایه به دست می‌آید. اما حالتی که n, m بزرگ باشند
تمام جواب‌ها را بررسی کنیم و انتخاب جوابی که تابع هدف را بهینه کند مشکل است.
آنچه مورد نیاز است روشی است که از مجموعه جواب‌ها یک جواب را
که تابع هدف را بهینه می‌کند، انتخاب کند.

روش سیمپلکس (ساده) چنین روشی است. این روش از یک نقطه رأسی شروع و گام به گام
آن را بهبود می‌بخشد. هر مرحله یک نقطه رأسی مجاور را بررسی می‌کند که
مقدار تابع هدف بهتر از آن گره است. مقدار بهینه به دست می‌آید. در حالت کلی تعداد مراحل
لازم (معمولاً بین m و 2m) است تا به جواب بهینه برسیم.
روش سیمپلکس هر بار جواب بهتری یا حداقل مساوی تابع هدف قبلی را
پیدا می‌کند. روش سیمپلکس یکی از مهم‌ترین روش‌های حل مسائل
این روش را مطالعه می‌کنیم.

- تولید جواب‌های نقطه رأسی

فرض کنید که یک جواب نقطه رأسی موجود است که m بردار P از مجموعه n بردار
اصلی داشته باشیم. فرض می‌کنیم که این m بردار مستقل خطی، m بردار اول باشند.
لذا داریم:
$$X_0=(x_1,x_2,\dots,x_m,0,0,\dots,0)$$
$$x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_mP_m=P_0 \quad (1) \qquad x_i\geq 0$$
حال می‌خواهیم نقطه رأسی دیگری را که مجاور است پیدا کنیم.
m بردار $P_1,\dots,P_m$ که مستقل فرض شده‌اند تشکیل یک پایه می‌دهند و هر بردار را می‌توان
$P_{m+1},P_{m+2},\dots,P_n$ را به صورت ترکیب خطی از $P_1,\dots,P_m$ بیان کرد
$$x_{1,m+1}P_1+x_{2,m+1}P_2+\dots+x_{m,m+1}P_m=P_{m+1} \quad (2)$$
رابطه (2) را در θ ضرب کرده و از رابطه (1) کم می‌کنیم. خواهیم داشت:
$$(x_1-\theta x_{1,m+1})P_1+(x_2-\theta x_{2,m+1})P_2+\dots+(x_m-\theta x_{m,m+1})P_m+\theta P_{m+1}=P_0$$

بردار $X_1 = \left((x_1 - \theta x_{1,m+1}), \dots, (x_m - \theta x_{m,m+1}), \theta, 0, \dots, 0 \right)$

یک جواب شدنی است و اگر همه مؤلفه‌های X_1 نامنفی باشند، X_1 یک جواب شدنی غیر پایه است در حالی که می‌خواهیم X_1 یک جواب پایه شدنی متفاوت با X_0 باشد ($\theta > 0$).

- اگر $x_{i,m+1}$ ها منفی یا صفر باشند واضح است که $x_i - \theta x_{i,m+1}$ ها نامنفی خواهند بود.

- اگر $x_{i,m+1}$ ها مثبت باشند می‌خواهیم $\theta > 0$ را چنان بیابیم که برای همه $x_{i,m+1} > 0$ داشته باشیم:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x_i}{x_{i,m+1}} \geq \theta$$

بنابراین به ازای هر θ‌ای که در رابطه

$$\theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$$

صدق کند X_1 یک جواب پایه شدنی را ② خواهد بود.

و مشاهده می‌کنیم که تنها با یک تعویض (حداکثر m مؤلفه مثبت داشته باشد و بردارهای متناظر با این m مؤلفه مثبت، مستقل خطی باشند) لذا θ را چنان تعیین کنیم که حداقل یکی از مؤلفه‌های X_1 صفر شود. اگر فرض کنیم

$$\theta = \min \frac{x_i}{x_{i,m+1} > 0} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}$$

بنابراین جواب پایه شدنی جدید به صورت زیر است:

$$x'_2 P_2 + x'_3 P_3 + \dots + x'_m P_m + x'_{m+1} P_{m+1} = P_0$$

که در آن

$$x'_i = x_i - \theta x_{i,m+1}, \quad i = 2, \dots, m$$

$$x'_{m+1} = \theta$$

حال باید نشان دهیم بردارهای متناظر این m مؤلفه مستقل خطی هستند. فرض می‌کنیم که بردارهای متناظر این m مؤلفه، وابسته خطی باشند یعنی

$$d_2 P_2 + d_3 P_3 + \dots + d_m P_m + d_{m+1} P_{m+1} = 0 \quad d_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \exists d_i \neq 0$$

اگر $d_{m+1} = 0 \Rightarrow P_2, \dots, P_m$ وابسته خطی هستند که تناقض است زیرا $P_2, \dots, P_m$ مستقل خطی هستند. پس $d_{m+1} \neq 0$.

$$P_{m+1} = -\frac{d_2}{d_{m+1}} P_2 - \frac{d_3}{d_{m+1}} P_3 - \dots - \frac{d_m}{d_{m+1}} P_m$$

$$P_{m+1} = 0 \times P_1 + l_2 P_2 + \cdots + l_m P_m \quad (3)$$

تعریف شده درست است

$$P_{m+1} = x_{1,m+1} P_1 + x_{2,m+1} P_2 + \cdots + x_{m,m+1} P_m \quad (4)$$

در حالتی که P_{m+1} را در ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشته شد، که این ممکن نیست پس (3) و (4) یک رابطه‌اند $x_{1,m+1} = 0$ که این

نتیجه می‌دهد که $x_{1,m+1}$ ... نیز خلاف فرض اول است

مثال ۲: فرض کنید دستگاه معادلات زیر را داریم

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\
3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & =7 \\
2x_1 & -4x_2 & & & +x_5 & & =12 \\
-4x_1 & -3x_2 & +8x_3 & & & +x_6 & =10
\end{array}
$$

در ابتدا یک جواب نقطه زیر را داریم

$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0,\ x_4=7,\ x_5=12,\ x_6=10$

$X_0 = (0,0,0,7,12,10)$

$$7P_4 + 12P_5 + 10P_6 = P_0 \quad (1)$$

P_4 و P_5 و P_6 بردارهای پایه هستند، می‌خواهیم یکی از بردارهای غیرپایه مثلاً P_1 را وارد پایه کنیم در این صورت بردار پایه، نقطه جدید را به دست آوریم. ابتدا P_1 را برحسب بردارهای پایه به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(2) \quad P_1 = 3P_4 + 2P_5 - 4P_6 \Rightarrow x_{41} = 3,\ x_{51} = 2,\ x_{61} = -4$$

(2) را در θ ضرب کرده و از (1) کم می‌کنیم.

$$\theta P_1 + (7-3\theta)P_4 + (12-2\theta)P_5 + (10+4\theta)P_6 = P_0 \quad (3)$$

چون $x_{41}=3$ و $x_{51}=2$ مثبت هستند، θ را از رابطه x_{i1} به صورت زیر تعیین می‌کنیم.

$$\theta = \min \frac{x_i}{x_{i1}} = \min\left(\frac{7}{3}, \frac{12}{2}\right) = \frac{7}{3} = \frac{x_4}{x_{41}}$$

با جایگزینی این مقدار θ در رابطه (3)، بردار P_4 از پایه حذف می‌شود.

$$\frac{7}{3}P_1 + \frac{22}{2}P_5 + \frac{58}{3}P_6 = P_0$$

26

لذا نقطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$X_1 = (\frac{7}{3}, 0, 0, 0, \frac{22}{3}, \frac{58}{3})$

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_4	7	3	-1	2	1	0	0	$\frac{7}{3}$ $\rightarrow$ خارج
P_5	12	2	-4	0	0	1	0	$\frac{12}{2}$
P_6	10	-4	-3	8	0	0	1	—

$X_0 = (0, 0, 0, 7, 12, 10)$

$\uparrow$ وارد

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	$\frac{7}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{7}{2}$
P_5	$\frac{22}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	—
P_6	$\frac{58}{3}$	0	$-\frac{13}{3}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{58}{32}$ $\rightarrow$ خارج

$X_1 = (\frac{7}{3}, 0, 0, 0, \frac{22}{3}, \frac{58}{3})$

$\uparrow$ وارد

$P_2 = -\frac{1}{3} P_1 - \frac{10}{3} P_5 - \frac{13}{3} P_6$

$P_3 = \frac{2}{3} P_1 + -\frac{4}{3} P_5 + \frac{32}{3} P_6$

$P_4 = \frac{1}{3} P_1 - \frac{2}{3} P_5 + \frac{4}{3} P_6$

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	$\frac{9}{8}$	1	$-\frac{1}{16}$	0 $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{16}$
P_5	$\frac{39}{4}$	0	$-\frac{31}{8}$	0 $-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$
P_3	$\frac{58}{32}$	0	$-\frac{13}{32}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{32}$

$X_2 = (\frac{9}{8}, 0, \frac{58}{32}, 0, \frac{39}{4}, 0)$

52

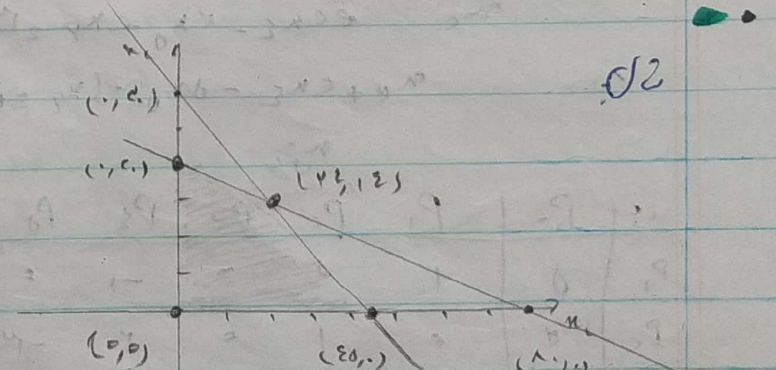
max $Z = 45x_1 + 80x_2$

s.t.

$5x_1 + 20x_2 \leq 400$

$10x_1 + 15x_2 \leq 450$

$x_j \geq 0$



$Z = 45x_1 + 80x_2$

s.t.

$5x_1 + 20x_2 + x_3 = 400$

$10x_1 + 15x_2 + x_4 = 450$

$x_j \geq 0$

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_3	400	5	20	1	0	80
P_4	450	10	15	0	1	45 →

نقطه ی رأسی اول

$X_0 = (0, 0, 400, 450)$ 0

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_3	175	0	12/5	1	-0/5	14 →
P_1	45	1	1/5	0	$\frac{1}{10}$	30

نقطه ی رأسی دوم

$X_1 = (45, 0, 175, 0)$ 2025

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_2	14	0	1	$\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{25}$	-
P_1	24	1	0/5	$-3/25$	$4/25$	150 →

نقطه ی رأسی سوم

$x_2 = (24, 14, 0, 0)$ 2200

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	20	1/4	1	1/20	0
P_4	150	25/4	0	$-3/4$	1

نقطه ی رأسی چهارم

$x_3 = (0, 20, 0, 150)$ 12

۹۲/۲/۲۸

در نمونه ی ، [illegible] . هدف [illegible] — [illegible]

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

s.t.

$$x_1 \quad - x_4 \quad - 2x_6 = 5$$

$$x_2 \quad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$$

$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0$$

در شروع کار ماتریس پایه
P_1 ، P_2 ، P_3 تشکیل شده
(اگر ستون ها نباشند ما اضافه می کردیم)

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	5	1	0	0	-1	0	-2	—
P_2	3	0	1	0	2	-3	1	3
P_3	5	0	0	1	2	-5	6	5/6 →

$X_0 = (5, 3, 5, 0, 0, 0)$

$z = 13$

$x_1 = 5 + x_4 + 2x_6$ / $x_2 = 3 - 2x_4 + 3x_5 - x_6$ / $x_3 = 5 - 2x_4 + 5x_5 - 6x_6$

$$Z = (5 + x_4 + 2x_6) + (3 - 2x_4 + 3x_5 - x_6) + (5 - 2x_4 + 5x_5 - 6x_6)$$
$$= 13 - 3x_4 + 8x_5 - 5x_6$$

$$Z = 13 - (3)x_4 - (-8)x_5 - (5)x_6$$

P_4 یا P_6 می‌توانند وارد شوند، که ضریب منفی دارند در P_0 در جهت Z افزایش خواهد یافت. بین P_4، P_6، به صورت ورود P_6، ضریب بیشتری دارد Z را بیشتر افزایش خواهد داد پس P_6 را وارد می‌کنیم و در نتیجه P_3 خارج خواهد شد.

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	$20/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	$-5/3$	0	$-$
P_2	$13/6$	0	1	$-1/6$	$5/3$	$-13/6$	0	$13/10$
P_6	$5/6$	0	0	$1/6$	$1/3$	$-5/6$	1	$5/2$

$\rightarrow$ $X_1 = (20/3, 13/6, 0, 0, 0, 5/6)$

$Z_1 = \frac{53}{6} = 8.83$

حال تعیین کنیم کدام از متغیرها وارد پایه شود. متغیری که منفی‌ترین ضریب را دارد، به صورت ابتکاری متغیرهای پایه P_1، P_2، و P_6 بر حسب متغیرهای غیرپایه P_3، P_4، و P_5 به دست می‌آوریم

$$x_1 = \frac{20}{3} - \frac{1}{3}x_3 + 1/3\, x_4 + 5/3\, x_5$$
$$x_2 = \frac{13}{6} + 1/6\, x_3 - 5/3\, x_4 + 13/6\, x_5$$
$$x_6 = 5/6 - 1/6\, x_3 - 1/3\, x_4 + 5/6\, x_5$$

حال x_1، x_2، x_6 را در Z قرار می‌دهیم

$$Z = \frac{53}{6} + 5/6\, x_3 - 4/3\, x_4 + \frac{23}{6}x_5$$
$$= 53/6 - (-5/6)x_3 - (4/3)x_4 - (\frac{-23}{6})x_5$$

P_4 را وارد می‌کنیم چون موجب افزایش Z می‌شود و در نتیجه P_2 خارج می‌شود.

پایه	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	$71/10$	1	$1/5$	$3/10$	0	$-21/10$	0
P_4	$13/10$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{13}{10}$	0
P_6	$4/10$	0	$-1/5$	$\frac{1}{5}$	0	$-2/5$	1

$X_2 = (\frac{71}{10}, 0, 0, \frac{13}{10}, 0, \frac{4}{10})$

$Z_2 = \frac{71}{10} = 7.1$

$$x_1 = \frac{71}{10} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{21}{10}x_5$$
$$x_4 = \frac{13}{10} - \frac{3}{5}x_2 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{13}{10}x_5$$
$$x_6 = \frac{4}{10} + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5$$

$$Z = \frac{71}{10} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{7}{10}x_3 + \frac{21}{10}x_5 = \frac{71}{10} - (-\tfrac{4}{5})x_2 - (-\tfrac{7}{10})x_3 - (-\tfrac{21}{10})x_5$$

هرکدام از بردارهای P_2، P_3، P_5 را که وارد کنیم باعث افزایش Z خواهد شد لذا دیگر ادامه نمی‌دهیم و جواب بهینه به دست آمد.

$$X^* = (\frac{71}{10}, 0, 0, \frac{13}{10}, 0, \frac{4}{5}) \quad , \quad Z^* = \frac{71}{10}$$

توجه: در صورتی که با به دست آوردن $z_j - c_j$ را حساب کنیم اگر $z_j - c_j$ منفی نداشته باشیم، جواب حاصل بهینه است.

تعیین یک جواب شدنی تبدیل کنیم:

فرض کنید مسئله ما در فضای زیر یک جواب پایه شدنی داشته باشد و جواب پایه شدنی داشته باشیم که بعد از یک جواب پایه شدنی باید بتوانیم به جواب شدنی دیگر برسیم. می‌خواهیم در این قسمت نشان دهیم که چگونه این جواب را بهبود دهیم:

$\min Z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$x_1P_1 + \dots + x_nP_n = P_0$

$x_j \geq 0$

فرض کنید یک جواب پایه شدنی به صورت زیر داشته باشیم:

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$x_{10}P_1 + x_{20}P_2 + \dots + x_{m0}P_m = P_0 \qquad (1)$$

$$c_1x_{10} + c_2x_{20} + \dots + c_mx_{m0} = Z_0 \qquad (2)$$

مقدار تابع هدف به ازای X_0.

هر بردار غیر پایه را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت. پس برای هر بردار P_j:

$$P_j = x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \dots + x_{mj}P_m \qquad j = 1, \dots, n \qquad (3)$$

حال z_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \dots + x_{mj}c_m = z_j \qquad j = 1, \dots, n \qquad (4)$$

که در آن c_i ضریب هزینه متناظر با P_i می‌باشد.

قضیه: اگر برای یک j معین شرط $z_j - c_j > 0$ برقرار باشد آنگاه یک دسته جواب شدنی می‌توان ساخت که برای هر عضو این مجموعه $Z < Z_0$ باشد،

در این صورت کران پایین Z یا متناهی و یا نامتناهی است.

حالت ۱: اگر کران پایین متناهی باشد، می‌توانیم یک جواب پایه‌ای قابل قبول متشکل از دقیقاً m متغیر مثبت ساخت که مقدار تابع هدف به ازای آن کمتر از مقدار تابع هدف به ازای جواب قبلی باشد.

حالت ۲: اگر کران پایین نامتناهی باشد می‌توانیم یک جواب قابل قبول متشکل از دقیقاً $m+1$ متغیر مثبت ساخت که مقدار تابع هدف به ازای آن بتواند به دلخواه کوچک شود.

اثبات: روش تولید نقطه فرین را بکار می‌بریم:

③ را در عدد نامنفی θ ضرب کرده و از ① کم می‌کنیم، داریم:

$$(x_{10}-\theta x_{1j})P_1+(x_{20}-\theta x_{2j})P_2+\dots+(x_{m0}-\theta x_{mj})P_m+\theta P_j=P_0 \quad ⑤$$

مؤلفه j ام

$$X_1=[(x_{10}-\theta x_{1j}),(x_{20}-\theta x_{2j}),\dots,(x_{m0}-\theta x_{mj}),0,0,\dots,0,\theta,0,0,\dots,0]$$

همچنین ④ را در همان θ ضرب کرده و از ② کم می‌کنیم — مقدار تابع هدف به ازای X_1

$$Z=(x_{10}-\theta x_{1j})c_1+(x_{20}-\theta x_{2j})c_2+\dots+(x_{m0}-\theta x_{mj})c_m+\theta c_j=$$
$$=Z_0-\theta z_j+\theta c_j=Z_0-\theta(z_j-c_j) \quad ⑥$$

در اینجا چون $\theta>0$ و هر دو طرف را ... بالا نیز انجام شده است.

اگر بتوان ضرایب $P_1, P_2, \dots, P_j$ در ⑤ نامنفی باشند آنگاه X_1 جواب پایه‌ای قابل قبول جدید تعیین کرده‌ایم که مقدار تابع هدف به ازای آن در رابطه ⑥ بدست آمد.

$Z=Z_0-\theta(z_j-c_j)$ مقدار تابع هدف به ازای X_1

$\theta=\min \frac{x_{i0}}{x_{ij}}$

حتماً $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}$ در ⑤ همگی مثبت هستند لذا خواهیم توانست یک عدد مثبت $\theta>0$ پیدا کنیم (حتی بی‌نهایت مقادیر) که به ازای آن ضرایب بردارها در ⑤ نامنفی ... که به ازای آن ...
$z_j-c_j>0$ ... به ازای $\theta>0$ داریم:

$$Z=Z_0-\theta(z_j-c_j)<Z_0$$

... که در هر مرحله یک جواب پایه‌ای قابل قبول جدید می‌توان ساخت اگر ... مقدار تابع هدف کمتر از مقدار تابع هدف به ازای جواب قبلی می‌باشد.

حالت ۱: ... تولید نقطه فرین ... که به ازای آن ... (z_j-c_j)

... ③ ... باشد آنگاه ... θ ... ④

[illegible] ۵ و ۶ [illegible] $\theta_0 = \min \frac{x_{i0}}{x_{ij}} > 0$ [illegible]
[illegible] θ_0 [illegible] m [illegible]
[illegible]

۵

حالت ۲: [illegible] θ [illegible] $z_j - c_j$ [illegible] x_{ij} [illegible]
[illegible] ($x_{ij} \le 0$) [illegible] θ_0 [illegible]
[illegible] θ_0 [illegible]
۵ [illegible] $m+1$ [illegible]
[illegible] θ [illegible]

تعریف: اگر [illegible] $X=(x_{10},\dots,x_{m0},0,\dots,0)$ [illegible] $z_j - c_j \le 0$
[illegible]
[illegible]

اثبات: فرض کنید $Y=(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ [illegible]
[illegible] $y_{10}P_1 + y_{20}P_2 + \dots + y_{n0}P_n = P_0$ (1)

و مقدار تابع هدف برای این جواب [illegible] $Z^* = c_1 y_{10} + \dots + c_n y_{n0}$ (2)

همچنین [illegible] $x_{10}P_1 + \dots + x_{m0}P_m = P_0$ (3)

مقدار تابع هدف [illegible] $c_1x_{10} + c_2x_{20} + \dots + c_mx_{m0} = Z_0$ (4)

$x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \dots + x_{mj}P_m = P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i$ (5)

[illegible] $Z_0 \le Z^*$ [illegible] $z_j - c_j \le 0$
[illegible] (2) [illegible]

$Z^* = c_1y_{10} + \dots + c_ny_{n0} \ge z_1y_{10} + \dots + z_ny_{n0}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} z_j y_{j0} \le Z^*$

همچنین داریم که $z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} y_{j0} \le z^* \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{j0}\right) \le z^* \quad (6)$$

$$(1) \rightarrow \sum_{j=1}^{n} y_{j0} P_j = P_0$$

(5) را در (1) جایگذاری می کنیم.

$$\sum_{j=1}^{n} y_{j0} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i\right) = P_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} P_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij}\right) = P_0$$

$$(3) \rightarrow \sum_{i=1}^{m} P_i x_{i0} = P_0 \Rightarrow x_{i0} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0} x_{ij} \quad i=1,\dots,m \quad (7)$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i0} \le z^*$$ از (6) و (7)

مثال:

$\max z = 4x_1 + x_2$

s.t.

$-x_1 + 2x_2 \le 4$

$2x_1 + 3x_2 \le 12$

$4x_1 - 4x_2 \le 12$

$x_j \ge 0$

$\min z = -4x_1 - x_2$

s.t.

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$

$4x_1 - 4x_2 + x_5 = 12$

			-4	-1	0	0	0	
c_j	c_i	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_3	0	4	-1	2	1	0	0	-
P_4	0	12	2	3	0	1	0	6
P_5	0	12	4	-4	0	0	1	3 →
		0	4	1	0	0	0	← $z_j - c_j$

Z [illegible]

از $z_j - c_j$ ها بزرگترین را انتخاب می کنیم یعنی ۴، لذا P_1 وارد و P_5 خارج می شود.

c_j	c_i	P_0	$\overset{-4}{P_1}$	$\overset{-1}{P_2}$	$\overset{0}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	$\overset{0}{P_5}$	θ
P_3	0	7	0	1	1	0	1/4	7
P_4	0	6	0	5	0	1	-1/2	6/5 →
P_1	-4	3	1	-1	0	0	1/4	-
		-12	0	5	0	0	-1	

P_2 وارد و P_4 خارج می شود.

پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	0	$\frac{29}{5}$	0	0	1	$-1/4$	$7/20$
P_2	-1	$\frac{2}{5}$	0	1	0	$1/5$	$-1/10$
P_1	-4	$\frac{21}{5}$	1	0	0	$1/5$	$3/20$
		-18	0	0	0	-1	$-1/2$

چون $c_j - z_j$ همگی نامثبت‌اند پس جواب بهینه بدست آمده، که عبارتست

از: جواب بهینه متناهی منحصربفرد می‌باشد. $x^* = \left(\frac{21}{5}, \frac{2}{5}, \frac{29}{5}, 0, 0\right)$

مقدار تابع هدف بدست آمده را باید در منفی ضرب کنیم زیرا مسئله ما max بوده است که به min تبدیل شد. مقدار تابع هدف

بدست آمده که در حالت min می‌باشد را در منفی ضرب می‌کنیم تا مقدار max تابع هدف

بدست آید. لذا $Z^* = -(-18) = 18$

مثال:

$$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \min z = -2x_1 - x_2$$

st. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ s.t.

$$x_1 - x_2 \le 10 \quad \Longrightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 10$$

$$2x_1 - x_2 \le 40 \qquad\qquad 2x_1 - x_2 + x_4 = 40$$

$x_j \geq 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $x_j \geq 0$

پایه	c_B	P_0	$\overset{-2}{P_1}$	$\overset{-1}{P_2}$	$\overset{0}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	θ
P_3	0	10	1	-1	1	0	10 →
P_4	0	40	2	-1	0	1	20
		0	2 ↑	1	0	0	

پایه	c_B	P_0	$\overset{-2}{P_1}$	$\overset{-1}{P_2}$	$\overset{0}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	θ
P_1	-2	10	1	-1	1	0	–
P_4	0	20	0	1	-2	1	20 →
		-20	0	3 ↑	-2	0	

پایه	c_B	P_0	$\overset{-2}{P_1}$	$\overset{-1}{P_2}$	$\overset{0}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	θ
P_1	-2	30	1	0	-1	1	–
P_2	-1	20	0	1	-2	1	–
		-80	0	0	4 ↑	-3	

ملاحظه می‌کنیم که چون در ستون P_3 همه درایه‌ها منفی شده و $c_j - z_j$ آن مثبت است اگر θ را بزرگ کنیم

همواره جواب شدنی داریم. یعنی متغیر P_3 که به پایه وارد می‌شود

منفی نمی‌شوند لذا θ را به اندازه دلخواه بزرگ می‌توان

اختیار کرد. در نتیجه مقدار تابع هدف بیکران می‌شود. یعنی $Z^* = -(-\infty) = +\infty$ تابع هدف بیکران است.

$$x^* = \left((30+\theta), (20+2\theta), \theta, 0\right) \ ;\ \theta > 0$$

سؤال:

$$\max z = -2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$
s.t.
$$-4x_1 + x_2 \le 2$$
$$12x_1 + 6x_2 \le 42$$
$$-3x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \le \tfrac{3}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\min z = 2x_1 - \tfrac{1}{2}x_2$$
s.t.
$$-4x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$12x_1 + 6x_2 + x_4 = 42$$
$$-3x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_5 = \tfrac{3}{2}$$
$$x_j \ge 0$$

			2	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	
پایه	C_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_3	0	2	-4	1	1	0	0	$2 \rightarrow$
P_4	0	42	12	6	0	1	0	7
P_5	0	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{1}{2}$	0	0	1	3
α		0	-2	$\frac{1}{2}$ $\uparrow$	0	0	0	

P_3 و P_4 و P_5 ماتریس پایه

پایه	C_0	P_0	$\overset{2}{P_1}$	$\overset{-1/2}{P_2}$	$\overset{0}{P_3}$	$\overset{0}{P_4}$	$\overset{0}{P_5}$	θ
P_2	$-\frac{1}{2}$	2	-4	1	1	0	0	$-$
P_4	0	30	40	0	-6	1	0	$\frac{30}{40} \rightarrow$
P_5	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-$
α		-1	0 $\uparrow$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	

α غیرپایه صفر شده در جواب بهینه حاصل شده است پس طبق حکم ۱، ۲، ۳ جواب بهینه چندگانه می‌باشد برای پیدا کردن جواب بهینه دیگر لازم یک جواب دیگر بهینه ... آنگاه ... پایه ... ورود

$$z = z_0 - \theta(z_1 - c_1) = z_0$$

پایه	C_0	P_0	$\overset{2}{P_1}$	$\overset{-1/2}{P_2}$	P_3	P_4	P_5
P_2	$-\frac{1}{2}$	5	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0
P_1	2	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{40}$	0
P_5	0	$\frac{5}{4}$	0	0	$-\frac{13}{20}$	$\frac{1}{40}$	1
α		-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0

$$z^* = -(-1) = +1 \qquad X_1^* = (0, 2, 0, 30, \tfrac{1}{2})$$
$$X_2^* = (\tfrac{3}{4}, 5, 0, 0, \tfrac{5}{4})$$

$$X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*, \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

$$X^* = \begin{cases} x_1^* = \lambda \times 0 + (1-\lambda)\frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1-\lambda) \\ x_2^* = \lambda \times 2 + (1-\lambda) \cdot 5 = 2\lambda + 5(1-\lambda) \\ x_3^* = \lambda \times 0 + (1-\lambda) \times 0 = 0 \\ x_4^* = \lambda \times 30 + (1-\lambda) \times 0 = 30\lambda \\ x_5^* = \lambda \times \frac{1}{2} + (1-\lambda)\frac{5}{4} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{4}(1-\lambda) \end{cases} \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

مثال:

$$\max Z = x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7$$

s.t.

$$3x_3 + x_5 + x_6 = 6$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 10$$

$$-x_1 + x_6 = 0$$

$$x_3 + x_6 + x_7 = 6$$

$$x_j \geq 0$$

$$\min Z = -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$$

s.t.

$$3x_3 + x_5 + x_6 = 6$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = 10$$

$$x_1 - x_6 = 0$$

$$x_3 + x_6 + x_7 = 6$$

$$x_j \geq 0$$

			-1	1	1	3	-1	1	3	
[illegible]	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_5	-1	6	0	0	3	0	1	1	0	6 →
P_2	1	10	0	1	2	-1	0	0	0	$-$
P_1	-1	0	1	0	0	0	0	-1	0	$-$
P_7	3	6	0	0	1	0	0	1	1	6
α		22	0	0	1	-4	0	2 ↑	0	

θ مساوی دارد
[illegible]

			-1	1	1	3	-1	1	3
[illegible]	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_6	1	6	0	0	3	0	1	1	0
P_2	1	10	0	1	2	-1	0	0	0
P_1	-1	6	1	0	3	0	1	0	0
P_7	3	0	0	0	-2	0	-1	0	1
α		10	0	0	-5	-4	-2	0	0

$$\text{Max } Z = Z^* = -10$$

$$X^* = (6, 10, 0, 0, 0, 6, 0)$$

جواب بهینه است.

1

روش پایه ساختگی: Artificial basis

تا حالا در حل مسایل برنامه ریزی خطی فرض می‌کردیم که مسئله مورد نظر دارای جواب پایه شدنی اولیه می‌باشد. حال اگر پایه اولیه برای مسئله پیدا نکردیم یعنی جواب پایه‌ای شدنی نباشد چگونه باید روش اولیه جواب پایه را پیدا کنیم. (اگر مسئله به شکل استاندارد باشد و ضرایب سمت راست لزوما مثبت) فرض کنید که مسئله مورد نظر به شکل زیر باشد

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$x_j \geq 0$$

برای حل این مسئله،
متغیرهای مصنوعی به نام متغیرهای ساختگی یا مصنوعی به مسئله اضافه می‌کنیم:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + wx_{n+1} + \cdots + wx_{n+m}$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m$$

w یک عدد مثبت بزرگ در نظر گرفته می‌شود.

بدین ترتیب یک جواب پایه اولیه برای مسئله افزوده است زیرا متغیرهای مصنوعی $P_{n+1}, \ldots, P_{n+m}$ تشکیل یک پایه مصنوعی را برای مسئله افزوده می‌دهند. اگر مسئله اصلی دارای جواب بهینه متناهی باشد آنگاه. این جواب بهینه یک جواب بهینه [illegible]
افزوده نیز خواهد بود و وزن ساختگی تضمین می‌کند که جواب بهینه مسئله افزوده برای مسئله اصلی بدست خواهد آمد و در جواب بهینه متغیر مصنوعی با مقدار مثبت ($x_{n+i} > 0$) وجود ندارد. اگر مسئله اصلی جواب بهینه متناهی نداشته باشد. آنگاه جواب بهینه مسئله افزوده دارای حداقل یک $x_{n+i} > 0$ خواهد بود.

در شروع، سیمپلکس را مطابق با جدول زیر شروع می‌کنیم

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_j	P_n	P_{n+1}		P_{n+m}
P_{n+1}	w	$x_{n+1,0}$	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1n}	1		0
P_{n+2}	w	$x_{n+2,0}$	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2n}	0		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$
P_{n+m}	w	$x_{n+m,0}$	x_{m1}	x_{m2}	x_{mj}	x_{mn}	0		1
سطر $m+1$		0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_j$	$-c_n$	0	—	0
سطر $m+2$		$\sum x_{n+i,0}$	$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	$\sum x_{ij}$	$\sum x_{in}$	0	—	0

$$Z_0 = w\sum x_{n+i,0}$$

$$Z_j - c_j = w\sum x_{ij} - c_j \longrightarrow$$ تک تک عناصر از دو سطر ساخته می‌شوند

تا زمانی که در پایه متغیر مصنوعی وجود دارد

- سطرهای دو قسمتی Z را به دو قسمت یک ضریب w و یک ضریب غیر w است که مستقل از w است. ضریب غیر w و ضریب w را به ترتیب در سطرهای $(m+1)$ ام و $(m+2)$ ام ستون مربوطه قرار می‌دهیم.

با استفاده از عناصر سطر $m+2$ و انتخاب بزرگترین ضریب که اولین بردار ورودی را (با توجه به $\max_j \sum x_{ij}$) را ادامه می‌دهیم تا: 1- همه بردارهای مصنوعی از پایه حذف شده‌اند یا 2- هیچ عنصر مثبتی در سطر $(m+2)$ ام وجود نداشته باشد.

حالت اول دلالت می‌کند بر اینکه همه عناصر در سطر $(m+2)$ ام صفر شده‌اند و پایه مربوطه یک جواب شدنی اولیه برای مسئله اصلی است. که در این صورت آنگاه روش سیمپلکس را با تعیین جواب شدنی بهینه ادامه می‌دهیم.

در حالت دوم اگر عنصر $(m+2,0)$ مثبت باشد یعنی هنوز متغیر مصنوعی در پایه با مقدار مثبت وجود دارد، آنگاه مسئله اصلی فاقد جواب شدنی می‌باشد. اگر عنصر $(m+2,0)$ برابر صفر باشد آنگاه یک جواب شدنی برای مسئله اصلی وجود دارد که شامل حداقل یک متغیر مصنوعی با مقدار صفر می‌باشد. بنابراین جواب شدنی بهینه را ادامه می‌دهیم. در این حالت با انتخاب بردارهایی که عناصر مثبت سطر $(m+1)$ ام که عنصر سطر $(m+2)$ ام آنها صفر است ادامه می‌دهیم. این کار را تا زمانیکه عنصر مثبتی در سطر $(m+1)$ و عنصر صفر در سطر $(m+2)$ باشد ادامه می‌دهیم.

حل الگوریتم سیمپلکس شامل دو مرحله یا دو فاز می‌باشد

فاز I : روی متغیرهای مصنوعی بحث می‌کنیم که به عنوان متغیر اساسی در مرحله‌ای از جدول
در نظر گرفته شده‌اند و در این مرحله این متغیرها را از سطح اساسی خارج سازیم. با این وجود
همچنین در فاز I تمام مراحل یک جواب پایه‌ای الگوریتم را به مسئله اصلی می‌رساند.

فاز II : الگوریتم سیمپلکس را ادامه می‌دهیم به صورتی که ضریب‌ها را به مسئله اصلی می‌رسانیم.

$$\min Z = 2x_1 + x_2$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 = 2$$
$$x_j \geq 0$$

حل:

$$\min Z = 2x_1 + x_2 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8$$
s.t.
$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 2$$
$$x_j \geq 0$$

			2	1	0	0	0	M	M	M	
ب	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ
P_6	M	3	3	1	-1	0	0	1	0	0	1 →
P_7	M	6	4	3	0	-1	0	0	1	0	3/2
P_8	M	2	1	2	0	0	-1	0	0	1	2
		0	-2	-1	0	0	0	0	0	0	
		11	8 ↑	6	-1	-1	-1	0	0	0	

			2	1	0	0	0	M	M	M	
ب	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ
P_1	2	1	1	1/3	-1/3	0	0		0	0	3
P_7	M	2	0	5/3	4/3	-1	0		1	0	6/5
P_8	M	1	0	5/3	1/3	0	-1		0	1	3/5 →
		2	0	-1/3	-2/3	0	0		0	0	
		3	0	10/3 ↑	5/3	-1	-1		0	0	

ب	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ
P_1	2	4/5	1	0	-2/5	0	1/5		0		—
P_7	M	1	0	0	1	-1	1		1		1 →
P_2	1	3/5	0	1	1/5	0	-3/5		0		3
		11/5	0	0	-3/5	0	-1/5		0		
		1	0	0	1	-1	1		0		

پایه	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_1	۲	۲/۵	۱	۰	۰ ۳/۵	-۲/۵	۳/۵	۲
P_3	۰	۱	۰	۰	۱	-۱	۱	۱
P_2	۱	۲/۵	۰	۱	۰ ۱/۵	۱/۵	-۴/۵	—
		۱۴/۵	۰	۰	۰ -۳/۵	-۳/۵	۲/۵	
		۰	۰	۰	۰ ۱ ۱	۰	۰	

کمینه ی فاز I اعلام شد

فاز II را شروع می کنیم

پایه	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			۲	۱	۰	۰	۰
P_1	۲	۳/۵	۱	۰	-۳/۵	۱/۵	۰ ۳/۵
P_5	۰	۱	۰	۰	۱	-۱	۱
P_2	۱	۴/۵	۰	۱	۴/۵	-۲/۵	۰ -۴/۵
		۱۲/۵	۰	۰	-۲/۵	-۱/۵	

کمینه ی فاز II اعلام شد

$x^* = (۳/۵ , ۴/۵ , ۰ , ۰ , ۱)$, $z^* = ۱۲/۵$

• حالات ممکن که در سیمپلکس دو فازی رخ می‌دهد:

۱- دستگاه به صورت $Ax=b$ است ($A_{m\times n}$) و در بین بردارهای P_1 تا P_n، m بردار یکه وجود دارد. در این صورت فاز II سیمپلکس (الگوریتم سیمپلکس) را اجرا می کنیم.

۲- دستگاه به صورت $Ax=b$ است و هیچ بردار پایه‌ای یکه وجود ندارد لذا دستگاه را با متغیرهای ساختگی به صورت $Ax+I_mX_s=b$ که در آن $X_s=(x_{n+1},\dots,x_{n+m})$ بردار متغیرهای ساختگی است تبدیل می کنیم، سپس فاز I سیمپلکس را اجرا کرده و در صورت لزوم فاز II را نیز اجرا می کنیم.

۳- دستگاه به صورت $Ax=b$ و چند بردار یکه نیز در بین بردارهای P_1 تا P_n موجود است (کمتر از m تا). در این صورت به تعداد کمبود متغیر ساختگی به دستگاه اضافه می کنیم تا یک پایه واحد ایجاد شود سپس فاز I و بعد فاز II سیمپلکس را اجرا می کنیم.

۴- دستگاه به صورت $Ax\le b$ می باشد، در این صورت با اضافه کردن متغیرهای کمبود دستگاه را به شکل $Ax+I_mX_s=b$ تبدیل می کنیم و سپس فاز II سیمپلکس را اجرا می کنیم.

*

۵- دستگاه به صورت $Ax \geq b$: در این حالت با اضافه کردن متغیرهای کمکی، دستگاه به شکل زیر در می‌آید $Ax - I_m X_s = b$. این دستگاه را می‌توان با انجام یک عمل محوری به دستگاهی که دارای $(m-1)$ پایه تکی مثبت باشد (تبدیل کرد). برای این منظور معادله‌ای که دارای بزرگترین b_i باشد را در نظر می‌گیریم و معادلات دیگر را از آن کم می‌کنیم. در این صورت $(m-1)$ متغیر پایه تکی مثبت تشکیل می‌شود که برای پایه در نظر گرفته می‌شوند و فقط لازم است یک متغیر مصنوعی به سیستم اضافه کنیم.

*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad - x_{n+2} &= b_2 \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \quad - x_{n+l} &= b_l \xrightarrow{\text{Let}} \max b_i \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad - x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}
$$

فرض کنیم b_l ماکزیمم باشد: $b_l \geq b_i$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
(a_{l1} - a_{11})x_1 + \cdots + (a_{ln} - a_{1n})x_n + x_{n+1} \quad - x_{n+l} &= b_l - b_1 \\
(a_{l1} - a_{21})x_1 + \cdots + (a_{ln} - a_{2n})x_n \quad + x_{n+2} \quad - x_{n+l} &= b_l - b_2 \\
&\ \vdots \\
a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \quad - x_{n+l} + \underset{\text{مصنوعی}}{x_{n+m+1}} &= b_l \longrightarrow \text{متغیر مصنوعی} \\
&\ \vdots \\
(a_{l1} - a_{m1})x_1 + \cdots + (a_{ln} - a_{mn})x_n \quad - x_{n+l} \quad + x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}
$$

با این ترتیب دستگاه متعارف با یک متغیر مصنوعی اضافه داریم، که آن را وارد می‌کنیم و بعداً با M بزرگ یا دو مرحله‌ای حل می‌کنیم.

۶- دستگاه به صورت ترکیبی از حالات فوق: در این صورت با استفاده از نتایج فوق می‌توان دستگاه را به فرم استاندارد مبدل کرد.

مثال:

$$
\begin{aligned}
\max\ & z = x_4 - x_5 \\
\text{s.t.}\ & \\
& 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& -2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_j \geq 0
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ & z = -x_4 + x_5 + Mx_9 \\
\text{s.t.}\ & \\
& -2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 \\
& 2x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 0 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 + x_8 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + \underset{\text{مصنوعی}}{x_9} = 1 \\
& x_j \geq 0
\end{aligned}
$$

حل ۱:
$X^* = (4/5, 1/5, 3/5, 0, 0, 0, 0, 0) \quad Z^* = 0$

حل ۲:

$\min Z = x_1 - 4x_2$
s.t.
$3x_1 + 2x_2 \geq 12$
$3x_1 - x_2 \leq 8$
$\frac{3}{2}x_1 + x_2 \leq 14$
$x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq \frac{1}{3}$
$x_j \geq 0$

$\min Z = x_1 - 4x_2 + Wx_7$
s.t.
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_7 = 12$
$3x_1 - x_2 + x_4 = 8$
$\frac{3}{2}x_1 + x_2 + x_5 = 14$
$x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_6 = 1/2$
$3x_1 + \frac{5}{2}x_2 - x_6 + x_7 = 29/2$

مرکب:
$X^* = (4, 7, 0, 0, 0, 0) \quad ; \quad Z^* = -24$

حل ۳:

$\max Z = x_1 + x_2$
s.t.
$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1 - x_2 \leq 1$
$-x_1 + x_2 \leq 1$
$x_j \geq 0$

$\min Z = -x_1 - x_2 + Wx_6$
s.t.
$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 1$
$x_1 - x_2 + x_4 = 1$
$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$

			-1	-1	0	0	0	W	
B.V.	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_6	W	1	1	1	-1	0	0	1	1 →
P_4	0	1	1	-1	0	1	0	0	1
P_5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
		0	1	1	0	0	0	0	
		1	1 ↑	1	-1	0	0	0	

P_1 را ... P_6 خارج کن

			-1	-1	0	0	0	W	
B.V.	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-1	1	1	1	-1	0	0		-
P_4	0	0	0	-2	1	1	0		0 →
P_5	0	2	0	2	-1	0	1		-
		-1	0	0	1	0	0		
		0	0	0	0 ↑	0	0		

کمترین ... I ...

			-1	-1	0	0	0	
B.V.	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_1	-1	1	1	-1	0	1	0	-
P_3	0	0	0	-2	1	1	0	-
P_5	0	2	0	0	0	1	1	-
		-1	0	2 ↑	0	-1	0	

... جواب بی‌کران ...

$X^* = (1+\theta, \theta, 2\theta, 2, 0) \quad \theta > 0$
$Z^* = -(-1-2\theta) = 1 + 2\theta$

مثال ۶

$$\min z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + Mx_4 + Mx_5$$

s.t.

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 1$$

پایه	c	P_0	P_1 (1)	P_2 (−2)	P_3 (3)	P_4 (M)	P_5 (M)	θ
P_4	M	2	−2	1	3	1	0	2/3
P_5	M	1	2	3	4	0	1	1/4 →
		0	−1	2	−3	0	0	
		3	0	4	7 ↑	0	0	

پایه	c	P_0	P_1 (1)	P_2 (−2)	P_3 (3)	P_4 (M)	$~~P_5~~$
P_4	M	5/4	−7/2	−5/4	0	1	
P_3	3	1/4	1/2	3/4	1	0	
		3/4	−1/2	17/4	0	0	
		5/4	−7/2	−5/4	0	0	

چون در سطر $m+2$ عنصر مثبتی وجود ندارد لذا کلیهٔ بردارهای I حذف شده‌اند، اما چون عنصر $(m+2, 0)$ مثبت است حالت ممنوع است پس مسأله اصلی جواب قابل قبول وجود ندارد.

• روش تجدید نظر شده سیمپلکس:

با تحلیل الگوریتم سیمپلکس درمی‌یابیم که عامل اصلی برای حرکت از یک جواب قابل قبول پایه‌ای به یک جواب بهینه این است که بتوانیم درایه‌های غیرپایه‌ای را حسب بردارهای پایه‌ای در هر مرحله بشناسیم؛ با در دست داشتن این اطلاعات، اعمال زیر را انجام می‌دهیم:

۱. محاسبه عناصر $z_j - c_j$ برای تعیین بردار ورودی به پایه و تعیین اینکه آیا جواب فعلی بهینه است یا خیر.

۲. تعیین برداری که باید از پایه خارج شود.

۳. تبدیل پایه و به دست آوردن جواب جدید.

$\min CX$

$AX = b$

$X \geq 0$

فرض کنید که ماتریس B (ماتریس پایه) متناظر با m بردار اول ماتریس A باشد بنابراین

$BX_0 = b$ ، $X_0 \geq 0$

که در آن

$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$

$X_0 = B^{-1}b$

با محاسبه B^{-1} می‌توانیم کلیه بردارهای غیرپایه‌ای را به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نشان دهیم.

$$P_j = x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \dots + x_{mj}P_m \qquad X_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix}, \quad B = [P_1 \dots P_m]$$

$$\Rightarrow \underline{P_j = BX_j} \Rightarrow X_j = B^{-1}P_j$$

(عناصر x_{ij} مختصات بردار P_j بر اساس پایه)

۲. برای محاسبه عناصر سطر z داریم:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} - c_j = C_0 X_j - c_j$$
$$= C_0 B^{-1} P_j - c_j$$

فرض کنید $z_k - c_k = \max\limits_{z_j - c_j > 0} (z_j - c_j)$ ← آنگاه P_k وارد پایه می‌شود.

۳. برای تعیین برداری که باید از پایه خارج شود. ابتدا بردار X_k را محاسبه کنیم

$$X_k = B^{-1}P_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم که $X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{m0} \end{bmatrix}$

$$\theta = \min_{x_{ik} > 0} \left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}} \right) = \frac{x_{l0}}{x_{lk}}$$

P_l از پایه خارج شود.

پایه: $\bar{B} = (P_1, P_2, \dots, P_{l-1}, P_k, P_{l+1}, \dots, P_m]$

B^{-1} معلوم است می‌خواهیم $\bar{B}^{-1}$ را محاسبه کنیم (دقت کنید B، $\bar{B}$ در یک ستون با هم اختلاف دارند)

$$(\bar{B})^{-1} = E_l B^{-1}, \qquad E_l = [e_1, \dots, e_{l-1}, \eta, e_{l+1}, \dots, e_m]$$

$$\eta = \begin{bmatrix} -\frac{x_{1k}}{x_{lk}} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_{lk}} \\ \vdots \\ -\frac{x_{mk}}{x_{lk}} \end{bmatrix} \qquad (\bar{B})^{-1} = E_l B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -\frac{x_{1k}}{x_{lk}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & \frac{1}{x_{lk}} & & \vdots \\ 0 & \dots & & -\frac{x_{mk}}{x_{lk}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

سطر l-ام

ستون l-ام ($i=l$)

$$\bar{b}_{ij} = b_{ij} - b_{lj}\frac{x_{ik}}{x_{lk}} \qquad i = 1, \dots, m, \; i \neq l$$
$$j = 1, \dots, m$$

$$\bar{b}_{lj} = b_{lj}/x_{lk} \qquad i = l$$

[illegible]

$\min z = -45x_1 - 80x_2$

s.t.

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 80$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 90$

			-45	-80	0	0	
پایه	c_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_3	0	80	1	4	1	0	$20 \rightarrow$
P_4	0	90	2	3	0	1	30
		0	45	80	0	0	

			-45	-80	0	0	
پایه	c_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_2	-80	20	$1/4$	1	$1/4$	0	80
P_4	0	30	$5/4$	0	$-3/4$	1	$24 \rightarrow$
		-1600	25	0	-20	0	

			-45	-80	0	0
پایه	c_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-80	14	0	1	$2/5$	$-1/5$
P_1	-45	24	1	0	$-3/5$	$4/5$
		-2200	0	0	-5	-20

روش سیمپلکس تجدید نظر شده را اجرا می کنیم

$$B = [P_3 \ \ P_4] = I \longrightarrow B^{-1} = I$$

$$X_0 = B^{-1}b = B^{-1}P_0 = I\begin{bmatrix}80\\90\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80\\90\end{bmatrix} \begin{array}{l}\leftarrow x_{30}\\ \leftarrow x_{40}\end{array}$$

$$Z_j - c_j = c_0B^{-1}P_j - c_j \begin{cases} j=1: & c_0B^{-1}P_1 - c_1 = (0,0)\,I\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - (-45) = 45 \\ j=2: & c_0B^{-1}P_2 - c_2 = (0,0)\,I\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} - (-80) = 80 \end{cases}$$

بردار P_2 وارد پایه می شود.

$$k=2,\ X_2 = B^{-1}P_2 = I\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \begin{array}{l}\leftarrow x_{32}\\ \leftarrow x_{42}\end{array} \quad (\text{ز } x_{ik})$$

$$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}>0}\right) = \min\left(\frac{80}{4}, \frac{90}{3}\right) = \min(20, 30)$$

بردار P_3 خارج می شود.

پایه جدید $B = [P_2, P_4]$ مرحله دوم

$$B^{-1} \rightarrow \begin{array}{c}4\\3\end{array}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c}1\\0\end{array}\begin{bmatrix}1/4 & 0\\-3/4 & 1\end{bmatrix}$$

ستون محوری

جدید $X_0 = B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix}1/4 & 0\\-3/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\90\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix} \begin{array}{l}\leftarrow x_{20}\\ \leftarrow x_{40}\end{array}$

$$Z_j - c_j = \underbrace{c_0B^{-1}}_{(-20,\,0)}P_j - c_j \begin{cases} j=1: & (-80,0)\begin{pmatrix}1/4 & 0\\-3/4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - (-45) = 25 \\ j=3: & (-80,0)\begin{pmatrix}1/4 & 0\\-3/4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 0 = -20 \end{cases}$$

P_1 وارد پایه می شود

١٢/١

$$k=1 \longrightarrow X_1 = B^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_{21} \\ \leftarrow x_{41} \end{matrix}$$

$$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}>0}\right) = \min\left(\frac{x_{20}}{x_{21}} = \frac{20}{1/4}, \frac{x_{40}}{x_{41}} = \frac{40}{5/4}\right) = \min(80, 32) = 32$$

P_4 خارج می‌شود.

پایه جدید: $B = [P_2, P_1]$

$$B^{-1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/4 \\ 5/4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_{20} \\ \leftarrow x_{10} \end{matrix}$$

$$z_j - c_j = \begin{cases} j=3: & c_B B^{-1}P_3 - c_3 = (-80, -45)\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -5 \\ & (-5, -20) \\ j=4: & (-5, -20)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -20 \end{cases}$$

چون همه منفی است این
مسئله متوقف شود.

$$X^* = (24, 14, 0, 0), \quad Z^* = c_B X_0 = -2200$$

روش تجدید نظر شده سادک وقتی که متغیر ساختگی نیاز باشد.

$$\min z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n} = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max x_{n+m+2}$$

$$\max x_{n+m+1}$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$\overset{c_1}{a_{m+1,1}}x_1 + \cdots + \overset{c_n}{a_{m+1,n}}x_n + x_{n+m+1} = 0$$

$$a_{m+2,1}x_1 + \cdots + a_{m+2,n}x_n + x_{n+m+2} = b_{m+2}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n+m+2$$

$$x_{n+m+1} = -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n$$

$a_{m+1,j} = c_j$ ضرایب تابع min سازی

$b_{m+2} = -\sum_{i=1}^{m} b_i \quad , \quad a_{m+2,j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ منفی جمع ضرایب معادلاتی که احتیاج به متغیر ساختگی دارند.

اگر معادلات اول تا m (i=1..m) و (m+2) ام را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} + x_{n+m+2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+m+2} = -x_{n+1} - \cdots - x_{n+m}$$

x_{n+m+2} برابر است با: منفی مجموع متغیرهای ساختگی ← max

در ابتدا x_{n+m+2} منفی است، سطح صفر می‌رسانیم که باعث صفر شدن متغیرهای ساختگی می‌شود، یعنی که x_{n+m+2} را به سطح صفر می‌رسانیم، آنگاه جواب بدست آمده یک جواب پایه‌ای است که به آن فاز یک می‌گویند.

<u>الگوریتم سیمپلکس تجدید نظر شده برای وقتی که متغیر ساختگی نیاز است:</u>

ابتدا ماتریس‌های $\bar{A}$ و U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ a_{m+2,1} & & \cdots & a_{m+2,n} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{سطر } (m+1) \text{ ام ضرایب تابع min سازی} \\ \leftarrow \text{سطر } (m+2) \text{ ام} \end{array}$$

$$a_{m+2,j} = -\sum_{i \in I} a_{ij}$$

← مجموع ضرایب معادلاتی که احتیاج به متغیر ساختگی دارند.

$$U_{m+2,m+2} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

فاز I: متغیرهای ساختگی با مقادیر مثبت در جواب

گام ۱) اگر $x_{n+m+2} < 0$ می‌شود

سطر m+2 ام ماتریس U — ستون j ام ماتریس $\bar{A}$

$$\delta_j = U_{m+2} \cdot \bar{A}_j$$

ستون j ام ماتریس $\bar{A}$: از سطر ۱ تا m همان ضرایب A است، سطر m+1 همان ضرایب تابع مینیمم سازی، سطر m+2 منفی جمع ضرایب معادلاتی است که به متغیر ساختگی احتیاج دارند.

- ادامه الگوریتم از گام ۲.

اگر $x_{n+m+2} = 0$ ، اجرای فاز II

گام ۲: اگر همه $\delta_j \geq 0$ آنگاه x_{n+m+2} در بیشینه خود بوده در نتیجه جواب شدنی برای مسأله اصلی وجود ندارد.

- اگر حداقل یک $\delta_j < 0$ وجود داشته باشد آنگاه متغیری که دارای جواب باشد، مثلاً x_k متناظر با کوچکترین δ_j های منفی مرکز کشیده. $\delta_k = \min \delta_j$

- گام ۳: محاسبه بردار X_k. $x_{ik} = U_i \cdot \bar{A}_k$

$$X_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{mk} \\ x_{m+1,k} \\ x_{m+2,k} \end{bmatrix} \qquad X_k = U\bar{A}_k = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{m+2} \end{bmatrix} \bar{A}_k = \begin{bmatrix} U_1 \bar{A}_k \\ U_2 \bar{A}_k \\ \vdots \\ U_{m+2} \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

متغیر x_l که متناظر با θ است از پایه خارج می‌شود.

$$\theta = \min_i \left(\frac{x_{i0}}{x_{ik} > 0} \right) = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

- گام ۴: محاسبه مقادیر X جدید و U جدید

$$\begin{cases} x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \cdot x_{ik} & i \neq k \\ x'_{k0} = x_{l0}/x_{lk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'_{ij} = U_{ij} - \frac{U_{lj}}{x_{lk}} \cdot x_{ik} & i \neq l \\ U'_{lj} = U_{lj}/x_{lk} \end{cases}$$

فاز II: وجود نداشتن متغیر ساختگی در متغیرهای پایه جواب.

گام ۱: در این فاز $x_{n+m+2} = 0$ می‌شود. $\gamma_j = U_{m+1} \cdot \bar{A}_j$ $j = 1, 2, \ldots, m$

گام ۲: اگر همه $\gamma_j \geq 0$ آنگاه x_{n+m+1} در بیشینه خود بوده و جواب بهینه برای مسأله اصلی است. مقدار منفی x_{n+m+1} مقدار واقعی تابع هدف است که کمینه شده است.

- اگر حداقل یک $\gamma_j < 0$ وجود داشته باشد بردار متناظر با کمترین γ_j وارد پایه می‌شود.

بردار P_k وارد پایه می‌شود (متغیر x_k وارد جواب می‌شود) $\gamma_k = \min \gamma_j$

گام ۳: محاسبه بردار X_k و θ.

$X_k = U\bar{A}_k$. $\theta = \min \left(x_{i0}/x_{ik} > 0 \right) = x_{l0}/x_{lk}$

بردار P_l از پایه خارج می‌شود. (متغیر x_l از جواب خارج می‌شود)

گام ۴: محاسبه X_0 جدید و U جدید.

$$\begin{cases} x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \cdot x_{ik} & i \neq k \\ x'_{k0} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U'_{ij} = U_{ij} - \frac{U_{lj}}{x_{lk}} \cdot x_{ik} & i \neq l \\ U'_{lj} = U_{lj}/\ldots \end{cases}$$

مثال:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 10$$

$$x_j \geq 0$$

دیده می‌شود یک متغیر الحاقی می‌توان به عنوان متغیر پایه استفاده کرد که ضریب لاگرانژ آن در تابع هدف صفر باشد.

حل: ماتریس $\bar{A}$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{r c}
 & \\
\bar{A} = & \\
 & \\
m+1 & \\
m+2 &
\end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -9 & -1 \end{bmatrix}$$

← ضرایب تابع هدف min سطر

پایه	P_0	U					X_k
P_5	15	1	0	0	0	0	3
P_6	20	0	1	0	0	0	5
P_7	10	0	0	1	0	0	1
	0	0	0	0	1	0	-3
	-45	0	0	0	0	1	-9

x_{n+m+1}

x_{n+m+2}

منفی مجموع ضرایب ... معادلاتی که متغیر مصنوعی دارند

چون $x_{n+m+2} < 0$ ، لذا فاز I را شروع می‌کنیم

$$\delta_j = U_{m+2}\bar{A}_j$$

$$\Delta = U_{m+2}\bar{A} = (0,0,0,0,1)\bar{A} = (-4,-5,-9,-1)$$

کمترین مقدار است ← P_3 وارد پایه می‌شود.

$$X_3 = U\bar{A}_3 = I\bar{A}_3 = \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i3}}\right)_{x_{i3}>0} = \min\left(\frac{15}{3}, \frac{20}{5}, \frac{10}{1}\right) = 4 \longrightarrow$$ P_6 خارج می‌شود

پایه	P_0	U					X_2	
P_5	3	1	-3/5	0	0	0	7/5	3
P_3	4	0	1/5	0	0	0	1/5	1
P_7	6	0	-1/5	1	0	0	9/5	1 0
	12	0	3/5	0	1	0	-7/5	0 -3
	-9	0	9/5	0	0	1	-16/5	0 -9

منفی‌ترین

$\Delta = U_{m+2}\cdot\bar{A} = (0, 9/5, 0, 0, 1)\,\bar{A} = (-2/5, -12/5, 0, -1)$

چون P_1 در پایه است لذا δ_1 آن برابر صفر است

$\delta_2 \leftarrow \min \delta_j = \delta_2$ ، P_2 وارد پایه می‌شود

$$X_2 = U\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1/5 \\ 9/5 \\ -7/5 \\ -14/5 \end{bmatrix}$$

$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i2}>0}\right) = \min\left(\frac{3}{7/5}, \frac{4}{1/5}, \frac{2}{9/5}\right) = \min\left(\frac{15}{7}, 20, 10/9\right) = \frac{15}{7}$

P_5 از پایه خارج می‌شود.

	P_0	U					X_4		
P_2	15/7	5/7	-2/7	0	0	0	0	1	
P_3	25/7	-1/7	3/7	0	0	0	1	0	1/5
P_7	15/7	-9/7	4/7	1	0	0	1	0	9/5
	15	1	0	0	1	0	1	0	-7/5
	-15/7	12/7	2/7	0	0	1	-1	0	-12/5

$\Delta = U_{m+2}\,\bar{A} = (12/7, 2/7, 0, 0, 1)\,\bar{A} = (-4/7, 0, 0, -1)$

$\min \delta_j = \delta_4 \longrightarrow$ P_4 وارد پایه می‌شود

$X_4 = U\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i4}>0}\right) = \min(-, -, 15/7) = 15/7$

بردار P_7 از پایه خارج می‌شود.

	P_0	U					X_1	
P_2	15/7	5/7	-2/7	0	0	0	-1/7	0 0
P_3	25/7	-1/7	3/7	0	0	0	3/7	0
P_4	15/7	-9/7	4/7	1	0	0	4/7	1
	9/7	12/7	-4/7	-1	1	0	-4/7	0 1
	0	1	1	1	0	1	0	0 -1

چون $x_{n+m+2} = 0$ فاز II را اجرا می‌کنیم.

$\delta_j = U_{m+1}\bar{A}_j \longrightarrow \Omega = U_{m+1}\bar{A} = (-4/7, 0, 0, 0)$

بردار P_1 وارد پایه می‌شود.

$$X_1 = U\bar{A}_1 = U \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 \\ 2/7 \\ 6/7 \\ -6/7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \min\left(\frac{x_{r0}}{x_{i1} > 0}\right) = \min\left(-, \frac{25/7}{2/7}, \frac{15/7}{6/7}\right) = 15/6 \longrightarrow$$ بردار P_2 از پایه خارج می‌شود

C.B	P_0	U					
P_2	5/2	1/2	−1/2	1/6	0	0	0 −1/7
P_3	5/2	1/2	0	−1/2	0	0	0 3/7
P_1	5/2	−9/6	4/6	7/6	0	0	1
	15	1	0	0	1	0	0 −6/7
	0	1	1	1	0	1	0

$$\Omega = U_{m+1}\bar{A} = (1, 0, 0, 1, 0)\bar{A} = (0, 0, 0, 1)$$

چون $\Omega \geq 0$ را منفی نداریم ($\Omega \geq 0$) لذا جواب بهینه را به دست آورده‌ایم [illegible]

$$X^* = (5/2, 5/2, 5/2, 0), \quad \max z = z^* = 15$$

مثال ۲

$$\min z = 10x_1 + 15x_2$$
s.t.
$$2x_1 + x_2 \geq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$x_j \geq 0$$

$$\begin{cases} \min z = 10x_1 + 15x_2 \\ \text{s.t.} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 20 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 16 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z = 10x_1 + 15x_2 + Mx_5$$
s.t.
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 20$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 40$$
$$x_j \geq 0$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا ستون اول را [illegible] بسازیم

	P_0	U				X_1
P_5	200	1	0	0	0	2
P_4	40	0	1	0	0	1
	0	0	0	1	0	15
	-200	0	0	0	1	-2

$\Delta = v_{m+2}\bar{A} = (0,0,0,1)\bar{A}$
$= (-2, -1, 1, 0)$

$\to P_1$ وارد می‌شود.

$$X_1 = U\bar{A}_1 = I\begin{bmatrix}2\\1\\15\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\15\\-2\end{bmatrix}$$

$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i1}>0}\right) = \min\left(\frac{200}{2}, \frac{40}{1}\right) = 40 \longrightarrow$ P_4 از پایه خارج می‌شود.

	P_0	U				X_2	
P_5	120	1	-2	0	0	7	0 2
P_1	40	0	1	0	0	-3	1
	-400	0	-15	1	0	45	0 15
	-120	0	2	0	1	-7	0 -2

$\Delta = v_{m+2}\bar{A} = (0, 2, 0, 1)\bar{A}$
$= (0, -7, -1, 2)$

$\to P_2$ وارد می‌شود

$$X_2 = U\bar{A}_2 = U\begin{bmatrix}1\\-3\\15\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-3\\45\\-7\end{bmatrix}$$

$\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i2}>0}\right) = \min\left(\frac{120}{7}, -\right) = 120/7 \longrightarrow$ P_5 خارج می‌شود

	P_0	U				
P_2	$\frac{120}{7}$	$1/7$	$-2/7$	0	0	1
P_1	$\frac{640}{7}$	$3/7$	$\frac{1}{7}$	0	0	0 -3
	$-\frac{8200}{7}$	$-45/7$	$\frac{20}{7}$	1	0	0 45
	0	1	0	0	1	0 -7

جواب اولیه برای فاز II است

فاز II:

$\Omega = V_{m+1}\bar{A} = (-45/7, 20/7, 1, 0)\bar{A}$

$= (0, 0, 24/7, 20/7)$

چون $\Omega \geq 0$ کلیه ضرایب نسبی مثبت هستند به جواب بهینه مسئله اصلی رسیدیم:

$X^* = \left(\frac{640}{7}, \frac{120}{7}, 0, 0\right)$, $Z^* = -\left(-\frac{8200}{7}\right) = \frac{8200}{7}$

چون مسئله اصلی Min بوده است.

مثال:

$\min z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

s.t.

$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_j \geq 0$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

پایه	P_0	U				X_3
P_4	2	1	0	0	0	3
P_5	1	0	1	0	0	4
	0	0	0	1	0	3
	-3	0	0	0	1	-7

$\Delta = U_{m+2}\bar{A} = (0, -4, -7) \longrightarrow$ P_3 وارد پایه

$X_3 = U\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i3}}\right) = \min\left(2/3, 1/4\right) \rightarrow$ P_5 خارج می‌شود

پایه	P_0	U				
P_4	5/4	1	-3/4	0	0	0
P_3	1/4	0	1/4	0	0	1
	-3/4	0	-3/4	1	0	0
	-5/4	0	7/4	0	1	0

$\Delta = U_{m+2}\bar{A} = (7/2, 5/4, 0)$

≥ 0 ، لذا کلیه ی ارقام [illegible] هستند.

[illegible] x_{basic} ، لذا [illegible] بهینه [illegible]

[illegible]

مثال:

$\max z = x_1 + x_2$

s.t.

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_j \geq 0$

$\max z = x_1 + x_2 - Mx_4$

s.t.

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$

$x_1 - x_2 + x_5 = 1$

$-x_1 + x_2 + x_6 = 1$

$x_j \geq 0$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

پایه	P_0	U					X_1
P_3	1	1	0	0	0	0	1
P_4	1	0	1	0	0	0	1
P_5	1	0	0	1	0	0	-1
	0	0	0	0	1	0	-1
	-1	0	0	0	0	1	-1

$\Delta = u_{m+2}\bar{A} = (-1, -1, 1)$

P_1 وارد می‌شود

$X_1 = U\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad \theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i1}} > 0\right) = \min(1, 1, -)$

P_4 خارج می‌شود

پایه	P_0	U					X_5		
P_1	1	1	0	0	0	0	-1		1
P_4	0	-1	1	0	0	0	1	0	1
P_5	2	1	0	1	0	0	-1	0	-1
	1	1	0	0	1	0	-1	0	-1
	0	1	0	0	0	1	0	0	-1

$\Omega = u_{m+1}\bar{A} = (0, 0, -1)$

P_5 وارد می‌شود

$X_5 = U\bar{A}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad , \theta = \min\left(\frac{x_{i0}}{x_{i5}} > 0\right) = \min(-, 0, -)$

P_4 خارج می‌شود.

پایه	P_0	U					X_2		
P_1	1	0	1	0	0	0	-1	0	-1
P_2	0	-1	1	0	0	0	-2	1	
P_5	2	0	1	1	0	0	0	0	-1
	1	0	1	0	1	0	-2	0	-1
	0	1	0	0	0	1	0	0	0

$\Omega = u_{m+1}\bar{A} = (0, -2, 0)$

P_2 باید وارد شود.

$X_2 = U\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

چون $x_{i2} \leq 0$ همه نامثبت اند، لذا θ را هر مقداری می‌توانیم انتخاب کنیم. در نتیجه مسئله اصلی دارای جواب بهینه کمینه بیکران است

$x^* = (1+\theta, \theta, 0+2\theta, 0, 2) \quad , \quad Z^* = 1+2\theta \qquad \theta \geq 0$

روش M-بزرگ

این روش نیز برای حل مسائل LP ای که به متغیر ساختگی احتیاج دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این روش ساختار مدل اصلی را عوض می‌کنیم و متغیرهای ساختگی را به تابع هدف ~~با ضریب M~~ در مسئله اضافه می‌کنیم. ضریب این متغیرها را یک عدد مثبت خیلی بزرگ مانند M در تابع هدف در نظر می‌گیریم.

سپس روش سادک معمولی را برای بدست آوردن جواب بهینه به کار می‌بریم.

مثال:

$$\min Z = 10x_1 + 15x_2 \qquad \min Z = 10x_1 + 15x_2 + Mx_5$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 200 \qquad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 200$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 40 \qquad x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 40$$

$$x_j \geq 0 \qquad x_j \geq 0$$

			10	15	0	0	M	
پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_5	M	200	2	1	-1	0	1	100
P_4	0	40	1	-3	-1	1	0	40 → P_4 خارج می‌شود
		200M+40	2M-10	M-15	-M	0	0	

			10	15	0	0	M	
پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_5	M	120	0	7	1	-2	1	$\frac{120}{7}$ → P_5 خارج می‌شود
P_1	10	40	1	-3	-1	1	0	—
		120M+400	0	7M-45	M-10	-2M+10	0	

			10	15	0	0	M
پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	15	$\frac{120}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
P_1	10	$\frac{640}{7}$	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
		$\frac{8200}{7}$	0	0	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{20}{7}$	$\frac{40}{7}-M$

رجوع به ص 52

جدول بهینه است و چون متغیر ساختگی در پایه وجود ندارد، لذا جواب بهینه یک جواب ممکن برای مسئله اصلی است.

$$X^* = \left(\frac{640}{7}, \frac{120}{7}, 0, 0\right), \quad Z^* = \frac{8200}{7}$$

مسأله دوگان برنامه ریزی خطی:

به هر مسأله برنامه ریزی خطی ، یک مسأله برنامه ریزی خطی دیگر مربوط است که به آن مسأله دوگان

یا ثانوی می‌نامند و مسأله اصلی را مسأله اولیه می‌نامند.

رابطه این دو مسأله ... که جواب یکی را بتوان از جواب دیگری به دست آورد ...

جواب بهینه ... به دست می‌آید.

... دوگان ... مثال زیر ... کنید.

یک مسأله رژیم غذایی ... در این مسأله ... ماده غذایی ...

... مقدار ... ویتامین ...

مواد غذایی / ویتامین	۱	۲	۳	۴	حداقل مورد نیاز
A	۱	۰	۲	۳	۱۰
B	۲	۳	۱	۰	۸
هزینه	۴	۴	۳	۵	

x_j: مقدار ماده غذایی jام که باید تهیه شود.

$$\min f(x) = \min Z = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

s.t.

$$x_1 + 2x_3 + 3x_4 \geq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8$$

$$x_j \geq 0$$

حال یک ... که قرص‌های حاوی ویتامین A و B ... در این مسأله

... ~~...~~ ... قرص ... فروش ...

ترغیب ... شود.

w_i: قیمت قرص ویتامین iام

$$\max g(w) = 10w_1 + 8w_2$$

s.t.

$$w_1 + 2w_2 \leq 4$$

$$3w_2 \leq 4$$

$$2w_1 + w_2 \leq 3$$

$$3w_2 \leq 4$$

$$w_i \geq 0$$

~~ابتدا روابط بین مسئله اولیه و ثانویه را ... نگاهی دقیق‌تر ...~~

روابط زیر بین مسئله اولیه و ثانویه برقرار میباشد

۱- هر قید در یک مسئله با یک متغیر در مسئله دیگر مشخص میشود.

۲- عناصر سمت راست قیود در یک مسئله با ضرایب متغیرها در تابع هدف مسئله دیگر برابرند.

۳- در یک مسئله کمینه سازی و در دیگری بیشینه سازی است

۴- مسئله کمینه سازی دارای قیود بزرگتر یا مساوی ($\geq$) و مسئله بیشینه سازی دارای قیود کوچکتر یا مساوی ($\leq$) هستند

۵- متغیرها در هر دو مسئله نامنفی هستند

اولیه

$$\min f(x) = c_1x_1 + \dots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0$$

ثانویه

$$\max g(w) = b_1w_1 + \dots + b_m w_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \leq c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$w_i \geq 0$$

شکل فوق را شکل متقارن مسئله اولیه و ثانویه مینامند.

نتیجه ای که به دست می آید این است که ثانویه یک مسئله با تکرار متغیرها در مسئله دیگر برابر است. بنابراین ثانویه ~~...~~ یک مسئله با توجه به ثانویهٔ ثانویه در مسئله اولیه است.

Max اولیه	Min ثانویه	
قیود $\leq$	≥ 0	متغیرها
$\geq$	≤ 0	
$=$	نامقید	

Min اولیه	Max ثانویه	
قیود $\geq$	≥ 0	متغیرها
$\leq$	≤ 0	
$=$	نامقید	

$$\min f(x) = cx$$

s.t.

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$\max g(w) = wb$$

s.t.

$$wA \leq c$$

$$w \geq 0$$

$x_{n\times 1}$

$c_{1\times n}$

$b_{m\times 1}$

$w_{1\times m}$

$A_{m\times n}$

مثال.

$$\text{Max } f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
s.t.
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 12$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 42$$
$$x_j \ge 0$$

$$\text{Min } g(w) = 12w_1 + 42w_2$$
s.t.
$$w_1 + 2w_2 \ge 2$$
$$w_1 + 4w_2 \ge 4$$
$$2w_1 + w_2 \ge 2$$
$$w_i \ge 0$$

$$\text{Min } f(x) = x_1 + 2x_2$$
s.t.
$$4x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Max } g(w) = 3w_1 + 4w_2$$
s.t.
$$4w_1 + w_2 \le 1$$
$$2w_1 + 3w_2 \le 2$$
w_1 نامقید $,\ w_2 \ge 0$

$$\min f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
s.t.
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 5$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$
$$5x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 1$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3$ نامقید

$$\text{Max } g(w) = 5w_1 + 7w_2 + w_3$$
s.t.
$$2w_1 + w_2 + 5w_3 \le 1$$
$$-3w_1 + 2w_2 - w_3 \ge 2$$
$$w_1 - w_2 - 3w_3 = 5$$
$w_1 \le 0,\ w_2$ نامقید $,\ w_3 \ge 0$

قضیه دوگانی: اگر یکی از مسئله اولیه یا ثانویه دارای یک جواب بهینه متناهی باشد، آنگاه مسئله دیگر نیز دارای یک جواب بهینه متناهی خواهد بود و مقدار توابع هدف با یکدیگر برابر خواهند شد یعنی $\min f(x) = \max g(w)$

اگر یکی از مسئله ها دارای جواب بهینه بیکران باشد آنگاه مسئله دیگر فاقد جواب شدنی خواهد بود.

اثبات:

اولیه
$$\min f(x) = cx$$
s.t.
$$Ax = b$$
$$x \ge 0$$

ثانویه
$$\max g(w) = wb$$
s.t.
$$wA \le c$$
w نامقید

فرض می‌کنیم مسئله اولیه دارای جواب بهینه X_0 است که متغیرهای اساسی آن m مولفه اول آن باشند، و فرض می‌کنیم مرتب است:

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, \dots, 0), \quad B = [P_1, P_2, \dots, P_m]$$

ماتریس پایه نهایی

ماتریس ضرایب نهایی روش سیمپلکس (جدول نهایی سیمپلکس) را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم

$$\begin{array}{c} \\ \bar{X} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & & & x_m & x_{m+1} & & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1,m+1} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & x_{2,m+1} & & x_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & x_{m,m+1} & & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

بردار جواب بهینه عبارت است از $X_0 = B^{-1}P_0$ و در واقع در پایه ظاهر می‌شود

$$\min f(x) = c_0 X_0 \quad , \quad Z - C = c_0\bar{X} - C = c_0[x_1, x_2, \ldots, x_n] - (c_1 \ldots c_n)$$

$$c_0 = (c_1, \ldots, c_m) \qquad = (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots, z_n - c_n) \leq 0$$

$W_0 = c_0 B^{-1}$ فرض کنید $W_0 = (w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0})$ ضرایب را ترکیب کند.

آیا w_0 جواب شدنی است؟ باید نشان دهیم در قیود دوگان صدق می‌کند.

$$W_0 A - C = c_0 \underbrace{B^{-1} A}_{\bar{X}} - C = c_0 \bar{X} - C \leq 0 \Rightarrow W_0 A \leq C$$

پس W_0 یک جواب شدنی است برای دوگان

$$B^{-1}A = B^{-1}(P_1 \ldots P_n) = (x_1 \ldots x_n)$$

حالا باید ببینیم که آیا w_0 بهینه است؟ تابع هدف را محاسبه می‌کنیم:

$$g(w_0) = w_0 b = c_0 B^{-1} b = c_0 X_0 = \min f(x)$$

پس تابع هدف مساله دوگان به ازای w_0 (جوابی که فرض کردیم) برابر بهینه تابع هدف اولیه است

برای اینکه ببینیم max است یا خیر داریم

فرض کنید x یک جواب شدنی دلخواه از مساله اولیه و W نیز یک جواب شدنی دلخواه از مساله دوگان باشد پس داریم:

$$x \geq 0 \ , \ Ax = b \rightarrow WAx = Wb = g(w)$$

$$WA \leq C \Rightarrow WAx \leq Cx = f(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$g(w) \leq f(x)$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود که مقدار تابع هدف دوگان همواره کمتر یا مساوی مقدار تابع هدف اولیه است:

$$\max g(w) \leq \min f(x)$$

پس تابع هدف دوگان به ازای $W_0 = c_0 B^{-1}$ با مقدار بهینه برابر است $\Rightarrow g(w_0) = \min f(x) \Rightarrow$ از آنجایی که

اکسترمم را پیدا می‌کند پس $g(w_0) = \max g(w)$

$$\min f(x) =$$

حال نشان می‌دهیم که هرگاه مسئله اولیه دارای جواب بهینه متناهی باشد، دوگان آن نیز دارای جواب است. برای این منظور
ثابت می‌کنیم دوگانِ یک مسئله 2 نوع دیگر جواب بهینه متناهی است، مسئله اولیه نیز دارای جواب
بهینه متناهی است و مقادیر تابع هدف در جواب بهینه هر دو با هم برابر هستند.

$$\max g(w) = \max wb$$
$$wA \le c$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم دوگان مسئله دوگان (استاندارد) شده همان مسئله اولیه است
سازنده آن که نمی‌تواند شکل متقارن دارای جواب بهینه است همان
مسئله اولیه اصلی می‌باشد.

$$\max wb = -\min(-wb) \Rightarrow -\max wb = \min(-wb)$$

$$\begin{cases} \min(-wb) \\ \text{s.t.} \\ \quad wA \le c \\ \quad w \text{ آزاد} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(-wb) \\ wA + w_s I = c \\ w \text{ آزاد}, \ w_s \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \min(-w_1 + w_2)b + w_s \cdot 0 \\ \text{s.t.} \\ (w_1 - w_2)A + w_s I = c \\ \quad w_1, w_2, w_s \ge 0 \end{cases}$$

$$\min f(x) = cx$$
$$\text{s.t. } Ax = b, \ x \ge 0$$

$$\begin{cases} \min(-w_1 + w_2)b + w_s \cdot 0 \\ \text{s.t.} \\ (-w_1 + w_2)A - w_s I = -c \\ \quad w_1, w_2, w_s \ge 0 \end{cases}$$

اکنون مسئله دوگان مسئله اولیه استاندارد را می‌نویسیم که
درست اول از نوع 2 است. اگر این مسئله را
به صورت بهینه تبدیل کنیم آنگاه دوگان آن به صورت
متقارن است. حال برای این مسئله، دوگان آن را
می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \max(-cx) = -\min(cx) \\ \text{s.t.} \\ \\ (-A, A, -I)\,x \le (-b, b, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\max(-cx) = \min cx \\ -Ax \le -b \\ Ax \le b \\ -x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min cx \\ \text{s.t.} \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

که این همان اولیه است که دارای جواب بهینه متناهی است و به این ترتیب قضیه کامل
ثابت شده است.

از رابطه $g(w) \le f(x)$ واضح است که اگر ~~مسئله~~ اولیه بیکران باشد آنگاه
$g(w) \le -\infty$ یعنی w دوگان نشدنی است که نمی‌تواند در رابطه صدق کند، یا اینکه جواب ندارد و دیگر

• مثال:

$$\min z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$
$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$
$$x_j \geq 0$$

فرض: مسئله بالا توسط سیمپلکس حل شده و جدول نهایی آن به شکل زیر درآمده است.

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
P_3	-3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
P_6	0	11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
z	-11		$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

ثانیاً دوآل این مسئله را نوشته و جواب بهینه آن را پیدا کنید.

$$\max g(w) = 7w_1 + 12w_2 + 10w_3$$

s.t.

$$w_1 \leq 0$$
$$3w_1 - 2w_2 - 4w_3 \leq 1$$
$$-w_1 + 4w_2 + 3w_3 \leq -3$$
$$w_2 \leq 0$$
$$2w_1 + 8w_3 \leq 2$$
$$w_3 \leq 0$$

w مقید

$$w_0 = C_0 B^{-1} = (1, -3, 0)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

$\max g(w) = -11$

* ملاحظه می‌شود که این جواب‌ها، همان $z_1 - c_1$، $z_4 - c_4$، $z_6 - c_6$ بهینه جدول هستند!

$$z_1 = c_0 x_1 \quad , \quad z_4 = c_0 x_4 \quad , \quad z_6 = c_0 x_6$$

$$(z_1, z_4, z_6) = c_0(x_1, x_4, x_6) = c_0 B^{-1} = w_0 \quad \blacktriangle$$

* w_0 مقادیر $z_j - c_j$ مربوط به P_j است که در ابتدای کار [illegible] آن را [illegible]

قضیه دوگانی: دوگان مسئله اولیه را نشان دهید:

$$\min f(x) = cx \qquad\qquad \max g(w) = wb$$
$$\text{s.t.} \qquad\qquad\qquad \text{s.t.}$$
$$Ax \geq b \qquad\qquad wA \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad w \geq 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) = cx \\ \text{s.t.} \\ Ax - Iy = b \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \min f(x,y) = (c, 0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \\ (A, -I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0 \end{array}\right.$$

که ثابت شد اگر مسئله به فرم استاندارد باشد، دوگان آن نیز به فرم متعارف خواهد بود

مشخص می‌شود که دوگان همان مسئله اولیه دوگان متعارف است، تنها w آزاد در علامت است:

$$\max g(w) = wb \qquad\qquad \max g(w) = wb$$
$$\text{s.t.} \qquad \Rightarrow \qquad \text{s.t.}$$
$$w(A, -I) \leq (c, 0) \qquad\qquad wA \leq c$$
$$\qquad\qquad -w \leq 0$$
$$w \text{ نامقید} \qquad\qquad w \text{ نامقید}$$

$$\max g(w) = wb$$
$$\text{s.t.}$$
$$wA \leq c$$
$$w \geq 0$$

مثال:

$$\min f(x) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.}$$
$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_j \geq 0$$

جدول آغازین به روش سیمپلکس دو فازی است

پایه	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_6	w	3	3	1	-1	0	0	1	0	0
P_7	w	6	4	3	0	-1	0	0	1	0
P_8	w	2	1	2	0	0	-1	0	0	1
z		0	-2	-1	0	0	0	0	0	0
		11	8	6	-1	-1	-1	0	0	0

و جدول نهایی سیمپلکس آن به شکل زیر است.

پایه	c_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	2	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
P_5	0	1	0	0	1	-1	1
P_2	1	$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0
z		$\frac{12}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0

حال دوگان این مسئله را نوشته و جواب نهایی آن را مشخص می‌کنیم

$$\max g(w) = 3w_1 + 6w_2 + 2w_3$$

s.t.

$$3w_1 + 4w_2 + w_3 \le 2$$

$$w_1 + 3w_2 + 2w_3 \le 1$$

$$w_j \ge 0$$

گفتیم که w_i^* مساوی با $z_j - c_j$ بردار P_j ای است که در جدول آغازین در پایه بوده و ستون نظیر آن در جدول بهینه است می‌باشد. ملاحظه می‌شود که در این مسئله P_6 بردارهای جدول آغازین در جدول نهایی وجود ندارند ولی بردارهای P_3، P_4، P_5 که قرینه‌ی بردارهای P_6، P_7، P_8 هستند در آن وجود دارند. لذا می‌توان از منفی $z_3 - c_3$، $z_4 - c_4$ و $z_5 - c_5$ استفاده کرد، و ماتریس وارون پایه نهایی از عکس بردارها بدست می‌آید: $B^{-1} = [-P_3, -P_4, -P_5]$

$$w = c_0 B^{-1} = (\overset{2}{\cancel{\tfrac{3}{5}}}, \overset{0}{\cancel{1}}, \overset{1}{\cancel{\tfrac{6}{5}}}) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} = (\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}, 0)$$

$$w_1 = -(z_3 - c_3) = \tfrac{2}{5}, \quad w_2 = -(z_4 - c_4) = \tfrac{1}{5}, \quad w_3 = 0$$

قضیه کمبود مکمل:

بین جواب بهینه قابل قبول دستگاههای اولیه و ثانویه شرایطی می‌توان گذاشت: هرگاه k امین رابطه در دستگاه ... به صورت نامساوی باشد (متغیر کمبود نظیر آن مثبت باشد) آنگاه k امین متغیر ثانویه آن صفر می‌باشد؛ اگر k امین متغیر در دستگاه مثبت باشد آنگاه k امین رابطه ثانویه آن به صورت تساوی است (متغیر کمبود نظیر آن صفر است).

اثبات:

اولیه

$$\min f(x) = cx \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

ثانویه

$$\max g(w) = wb \quad \text{s.t.} \quad wA \leq c, \quad w \geq 0$$

هر دو دستگاه را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$\min f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

ضریب

$$\begin{array}{l|l}
w_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
w_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
w_i & \vdots \\
w_m & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max g(w) = w_1b_1 + w_2b_2 + \dots + w_mb_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m + w_{m+1} = c_1$$
$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m + w_{m+2} = c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m + w_{m+n} = c_n$$

$$w_i \geq 0$$

معادلات ... را در w_i ضرب کرده سپس مجموع این معادلات را از تابع هدف کم می‌کنیم:

$$\overbrace{\left(c_1 - \sum_{i=1}^{m} a_{i1}w_i\right)}^{w_{m+1}} x_1 + \overbrace{\left(c_2 - \sum_{i=1}^{m} a_{i2}w_i\right)}^{w_{m+2}} x_2 + \dots + \overbrace{\left(c_n - \sum_{i=1}^{m} a_{in}w_i\right)}^{w_{m+n}} x_n$$
$$+ w_1x_{n+1} + w_2x_{n+2} + \dots + w_mx_{n+m} = f(x) - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}_{g(w)}$$

$$w_{m+1}x_1 + w_{m+2}x_2 + \cdots + w_{m+n}x_n + w_1 x_{n+1} + w_2 x_{n+2} + \cdots + w_m x_{n+m}$$
$$= f(x) - g(w)$$

مقدار بهینه دو مسئله با هم برابرند و تمام عبارات سمت راست نامنفی و حاصلضرب‌ها نامنفی هستند لذا در جواب بهینه داریم:

$$w_{m+1}x_1 + w_{m+2}x_2 + \cdots + w_{m+n}x_n + w_1 x_{n+1} + w_2 x_{n+2} + \cdots + w_m x_{n+m} = 0$$

از آنجایی که هر یک از x_j ها و w_{m+j} ها و w_i ها نامنفی هستند لذا هر حاصلضرب نامنفی است تک تک جملات باید برابر صفر باشند لذا داریم:

$$\begin{cases} w_{m+j}\, x_j = 0 \longrightarrow \text{if } w_{m+j} > 0 \Longrightarrow x_j = 0 \\ w_i\, x_{n+i} = 0 \longrightarrow \text{،} \ x_{n+i} > 0 \Longrightarrow w_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{m+j}\, x_j = 0 \longrightarrow \text{if } x_j > 0 \Longrightarrow w_{m+j} = 0 \\ w_i\, x_{n+i} = 0 \longrightarrow \text{،} \ w_i > 0 \Longrightarrow x_{n+i} = 0 \end{cases}$$

- حکم ۳ ثابت است. صورت نهایی آن
- مثال: مسئله اولیه زیر را در نظر بگیرید، با توجه به جدول نهایی آن جواب بهینه مسئله ثانویه را به دست آورید. مقادیر متغیرهای دوگان را بحث کنید.

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$
s.t.
$$x_1 - x_4 - 2x_6 = 5$$
$$x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3$$
$$x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0$$

پ	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	1	$\frac{71}{10}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{21}{10}$	0
P_4	0	$13/10$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{13}{10}$	0
P_6	0	$2/5$	0	$-1/5$	$1/5$	0	$-2/5$	1
α		$\frac{71}{10}$	0	$-4/5$	$-\frac{7}{10}$	0	$-\frac{21}{10}$	0

$$\max g(w) = 5w_1 + 3w_2 + 5w_3$$
s.t.
$$w_1 \leq 1$$
$$w_2 \leq 1$$
$$w_3 \leq 1$$
$$-w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq 0$$
$$-3w_2 - 5w_3 \leq 0$$
$$-2w_1 + w_2 + 6w_3 \leq 0$$
w_i نامقید

$$W_0 = C_B B^{-1} = (1, 0, 0)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 3/10 \\ 0 & 2/5 & -1/10 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} =$$
$$= (1, \ 1/5, \ 3/10)$$
$$\underline{z_1 \quad z_2 \quad z_3}$$
$$w_1^* \quad w_2^* \quad w_3^*$$

$$\max g(w) = \frac{71}{10}$$

بحث درباره شرایط مکمل

اصلی:
$x_1 = \frac{71}{10}$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = \frac{13}{10}$
$x_5 = 0$
$x_6 = \frac{2}{5}$

کمکی:
$x_7 = 0$
$x_8 = 0$
$x_9 = 0$

اصلی:
$w_1 = 1$
$w_2 = \frac{1}{5}$
$w_3 = \frac{3}{10}$

کمکی:
$w_4 = 0$
$w_5 = \frac{4}{5}$ ← از شرط دوم داریم: $w_2 + w_5 = 1 \Leftarrow \frac{1}{5} + w_5 = 1 \Leftarrow$
$w_6 = \frac{7}{10}$ ← و از سوم: $w_3 + w_6 = 1 \Leftarrow \frac{3}{10} + w_6 = 1 \Leftarrow$
$w_7 = 0$
$w_8 = \frac{21}{10}$ ← از شرط پنجم داریم: $-3w_2 - 5w_3 + w_8 = 0 \Leftarrow$
$-\frac{3}{5} - 5 \times \frac{3}{10} + w_8 = 0$
$w_9 = 0$

مثال: با توجه به جدول بهینه زیر، مسئله دوگان را نوشته و جواب آن را محاسبه کنید.

$\max z = 3x_1 - x_2$
s.t.
$2x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1 + 3x_2 \leq 3$
$x_2 \leq 4$
$x_j \geq 0$

جدول بهینه مسئله اولیه

B	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	+3	3	1	3	0	1	0
P_3	0	4	0	4	1	2	0
P_5	0	4	0	1	0	0	1
	α	+9	0	+10	0	+3	0

[illegible]
[illegible]

$\min g(w) = 2w_1 + 3w_2 + 4w_3$
s.t.
$2w_1 + w_2 \geq 3$
$w_1 + 3w_2 + w_3 \geq -1$
$w_1 \leq 0, \; w_2, w_3 \geq 0$

در جدول آخر ستون‌های متناظر با ستون‌های پایه اولیه را می‌یابیم
P_4، P_5 و P_3 [illegible] P_4 و P_3 [illegible]
[illegible]
$-P_3$ و P_4 و P_5 می‌باشند

$w_0 = C_B B^{-1} = C_B(-P_3, P_4, P_5)$
$= (+3, 0, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 3, 0)$
$= (z_3, z_4, z_5)$ $\qquad \min g(w) = +9$

اصلی:
$x_1 = 3$
$x_2 = 0$

کمکی:
$x_3 = 4$
$x_4 = 0$
$x_5 = 4$

$w_1 = 0$
$w_2 = 3$
$w_3 = 0$

$w_4 = 0$
$w_5 = 10$

$w_1 + 3w_2 + w_3 - w_5 = -1$
$0 + 9 + 0 - w_5 = -1$

تحلیل حساسیت: مطالعه رفتار جواب‌های بهینه به ازای تغییر ضرایب، وقتی که تغییر ضرایب آن‌ها حداکثر محاسبات الگوریتم را دارد. یعنی تا چه دامنه‌ای از مقادیر ضرایب، جواب تعیین شده بهینه باقی می‌ماند. در اینجا ما تغییرات در ضرایب هزینه تابع هدف (c_j)، مقادیر سمت راست محدودیت‌ها (b_i) و ضرایب ماتریس A (a_{ij}) و اضافه کردن متغیر جدید و محدودیت جدید را در نظر می‌گیریم.

(در واقع تغییراتی که در جواب بهینه، یا ضرایب تغییرات دارد وجود ندارد، تحلیل حساسیت می‌نامیم.)

۱- تغییر در ضرایب هزینه $c_k \longrightarrow c_k+\Delta c_k$

می‌خواهیم ببینیم که Δc_k تا چه مقداری تغییر کند بهینگی جواب حفظ می‌گردد. یعنی اگر c_k به $c_k+\Delta c_k$ تبدیل شود، آیا هنوز جواب بهینه است؟

دو حالت داریم

الف) بردار P_k متناظر با c_k غیر پایه باشد

ب) " " " " پایه باشد

در حالت الف باید $z_k-(c_k+\Delta c_k)\le 0$ تا بهینگی جواب حفظ شود. لذا شرط زیر است:

$$\boxed{\Delta c_k \geq z_k - c_k}$$

$\min z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$

s.t.

$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$

$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$

$x_j \geq 0$

B	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0
P_3	-3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	0
P_6	0	11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1
		-11	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0

$c_1 \to c_1+\Delta c_1 \to \Delta c_1 \geq -\frac{1}{5}$ $\qquad$ $c_5 \to c_5+\Delta c_5 \to \Delta c_5 \geq -\frac{12}{5}$

$c_4 \to c_4+\Delta c_4 \to \Delta c_4 \geq -\frac{4}{5}$

در حالت ب، ملاحظه می‌کنید که کلیه z_j-c_j ها تغییر می‌کنند. مقدار z_j-c_j جدید عبارت است:

$$z'_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c'_i x_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} + \Delta c_k x_{kj} - c_j = z_j - c_j + \Delta c_k x_{kj}$$

علامت نامساوی شرط لازم که ترم‌های سمت راست از جواب بهینه خارج نشود را داریم:

$$\Delta c_k x_{kj} \leq -(z_j - c_j) \Rightarrow \begin{cases} \text{if } x_{kj} > 0 \Rightarrow \Delta c_k \leq -\dfrac{z_j - c_j}{x_{kj}} \\ \text{if } x_{kj} < 0 \Rightarrow \Delta c_k \geq -\dfrac{z_j - c_j}{x_{kj}} \end{cases}$$

از این دو شرط تغییرات Δc_k که $z_j - c_j$ را منفی نکند حاصل می‌شود لذا تغییرات آن

از سطرهای دیگر باید که جواب بهینه از بین نرود داریم:

$$\max_{x_{kj} < 0} \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}} \leq \Delta c_k \leq \min_{x_{kj} > 0} \frac{-(z_j - c_j)}{x_{kj}}$$

z_j غیر پایه‌ای

مثال: در مثال قبل داریم:

$c_2 \to c_2 + \Delta c_2$ متغیر پایه‌ای

$$\Delta c_2 \leq \min_{x_{kj} > 0} \left(\frac{-(-1/5)}{2/5}, \frac{-(-4/5)}{1/10}, \frac{-(-12/5)}{4/5} \right)$$

$$\Delta c_2 \leq \min\left(\frac{1}{2}, 8, 3\right) \Rightarrow \Delta c_2 \leq 1/2$$

$c_1 \to c_1 + \Delta c_1$ $\quad \Delta c_1 \leq \min\left(\dfrac{1/5}{1/5}, \dfrac{4/5}{2/10}, \dfrac{12/5}{4/5}\right)$

$$\Delta c_1 \leq \min(1, 8/2, 3) \Rightarrow \Delta c_1 \leq 1$$

$c_4 \to c_4 + \Delta c_4$ $\quad \max_{x_{kj} < 0}\left(\dfrac{-(-4/5)}{-1/2}\right) \leq \Delta c_4 \leq \min_{x_{kj} > 0}\left(\dfrac{-(-1/5)}{1}, \dfrac{-(-12/5)}{10}\right)$

$$-\frac{8}{5} \leq \Delta c_4 \leq \frac{1}{5}$$

تغییر در ضرایب سمت راست محدودیت: $b_e \to b_e + \Delta b_e$

فرض کنید b_e به $b_e + \Delta b_e$ تغییر کند در جدول جواب بهینه چه اتفاقی خواهد افتاد؟

واضح است که با این تغییر، هر وقت b تغییر کند در ستون آخر $X_0 = B^{-1}b$. لذا

جواب بهینه X_0 تغییر می‌کند و X_0' تغییر پیدا می‌کند.

$$X'_0 = B^{-1}b' = B^{-1}(b + \Delta b_l \cdot e_l) \qquad e_l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{سطر } l \text{ ام}$$

$$= B^{-1}b + \Delta b_l \cdot B^{-1}e_l \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= X_0 + \Delta b_l \begin{bmatrix} b_{1l} \\ b_{2l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} + \Delta b_l b_{1l} \\ x_{20} + \Delta b_l b_{2l} \\ \vdots \\ x_{m0} + \Delta b_l b_{ml} \end{bmatrix}$$

برای $X'_0 \geq 0$، لذا باید داشته باشیم:

$$x_{i0} + \Delta b_l b_{il} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\Delta b_l b_{il} \geq -x_{i0} \Longrightarrow \begin{cases} \text{if } b_{il} > 0 \to \Delta b_l \geq \dfrac{-x_{i0}}{b_{il}} \\ \quad\; b_{il} < 0 \to \Delta b_l \leq -\dfrac{x_{i0}}{b_{il}} \end{cases}$$

$$\max_{b_{il} > 0} \left(\frac{-x_{i0}}{b_{il}}\right) \leq \Delta b_l \leq \min_{b_{il} < 0} \left(\frac{-x_{i0}}{b_{il}}\right)$$

مثال: در مثال قبل اگر $b_j \to b_j + \Delta b_j$، محدوده تغییرات Δb_j را بیابید.

$$b_1 \to b_1 + \Delta b_1 \to B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad l = 1 \to B_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \max_{b_{i1} > 0} \left(\frac{-4}{4/5}, \frac{-5}{1/5}, \frac{-11}{1}\right) \leq \Delta b_1 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -10$$

$$b_2 \to b_2 + \Delta b_2 \qquad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\max_{b_{i2} > 0} \left(\frac{-4}{1/10}, \frac{-5}{4/10}\right) \leq \Delta b_2 \leq \min_{b_{i2} < 0} \left(\frac{-11}{-1/2}\right) \Rightarrow -\frac{50}{4} \leq \Delta b_2 \leq 22$$

$$b_3 \to b_3 + \Delta b_3 \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{-11}{1} \leq \Delta b_3 \Rightarrow \Delta b_3 \geq -11$$

* تغییر در عناصر ماتریس A، δa_{ij}

فرض کنید a_{lk} که عضو بردار غیر پایه‌ای است، متناظر با بردار P_k در $a_{lk} \to a_{lk} + \Delta a_{lk}$ این تغییر باعث تغییر در B^{-1} می‌شود لذا باعث تغییر در $X_0 = B^{-1}P_0 = B^{-1}b$ می‌شود. این تغییر باید به گونه‌ای باشد که مولفه‌های X_0 جدید مثبت باقی بمانند.

ضمناً $z_j - c_j$ ها نیز تغییر می‌کنند. چون $z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j$

و این تغییر باید طوری باشد که $z_j - c_j$ ها در جدول بهینه علامت منفی باقی بمانند.

از روی این روابط، سه قید برای جلوگیری از دامنه تغییرات Δa_{lk} حاصل می‌شود.

(1) $1 + b_{kl}\Delta a_{lk} > 0$

شرط ثابت ماندن جواب بهینه

(2) $\max\left(\dfrac{x_{i0}}{(b_{il}x_{k0} - x_{i0}b_{kl}) < 0}\right) \le \Delta a_{lk} \le \min \dfrac{x_{i0}}{(b_{il}x_{k0} - x_{i0}b_{kl}) > 0}$ $i \neq k$

شرط بهینه ماندن جواب بهینه

(3) $\max \dfrac{z_j - c_j}{\left[x_{kj}\sum_{i=1}^{m} c_i b_{il} - b_{kl}(z_j - c_j)\right] > 0} \le a_{lk} \le$

ذهای منفی ...

$\min \dfrac{z_j - c_j}{[\quad\quad] < 0}$

در مثال ۲ داریم:

$a_{23} \longrightarrow a_{23} + \Delta a_{23}$

$B = [P_2, P_3, P_5]$

مورد نظر a_{23}، یعنی P_2 که مربوط به متغیر پایه است، در جدول بهینه در ستون دوم ماتریس پایه قرار دارد. لذا در اینجا $l = 2$, $k = 2$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$1 + b_{22}\Delta a_{23} \ge 0 \implies 1 + \frac{3}{10}\Delta a_{23} \ge 0 \implies \boxed{\Delta a_{23} \ge -\frac{10}{3}}$ (1)

$i \neq k,\quad b_{il}x_{k0} - x_{i0}b_{kl} \implies \begin{cases} i=1 & b_{12}x_{20} - b_{22}x_{10} = \frac{1}{10}\times 5 - \frac{3}{10}\times 4 = -\frac{7}{10} \\ i=3 & b_{32}x_{20} - x_{30}b_{22} = -\frac{1}{2}\times 5 - \frac{3}{10}\times 11 = -\frac{58}{10} \end{cases}$

$\max\left(\dfrac{4}{-7/10}, \dfrac{11}{-58/10}\right) = \dfrac{-110}{58} \implies \boxed{\Delta a_{23} \ge -\frac{110}{58}}$ (2)

$\sum_{i=1}^{m} c_i b_{il} = (1, -3, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{4}{5}$

$x_{kj}\sum c_i b_{il} - b_{kl}(z_j - c_j)$
- $j=1$: $\frac{1}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{10}$
- $j=4$: $\frac{3}{10}\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{10}\left(-\frac{4}{5}\right) = 0$
- $j=5$: $\frac{2}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{10}\left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{2}{5}$

$$\max \frac{-12/5}{2/5} \le \Delta a_{22} \le \min \frac{-1/5}{-1/10} \Rightarrow \boxed{-6 \le \Delta a_{22} \le 2} \quad (3)$$

از ترکیب (1) ، (2) ، (3) خواهیم داشت

محدوده‌ی تغییرات a_{22} را حفظ می‌کند

$$\boxed{\frac{-110}{58} \le \Delta a_{22} \le 7}$$

- تغییر در a_{lj} که بردار P_j متناظر با آن در پایه قرار ندارد.

$$a_{lj} \longrightarrow a_{lj} + \Delta a_{lj}$$

این تغییر فقط در $z_j - c_j$ نظیرش تأثیر دارد.

$$P_j \longrightarrow P'_j \quad , \quad z_j - c_j = c_0 B^{-1} P_j - c_j$$

$$z'_j - c_j = c_0 B^{-1} P'_j - c_j = c_0 B^{-1}(P_j + \Delta a_{lj}\, e_l) - c_j$$

$$= c_0 B^{-1} P_j + \Delta a_{lj}\, c_0 B^{-1} e_l - c_j$$

$$= (z_j - c_j) + \Delta a_{lj}\, c_0 \begin{bmatrix} b_{1l} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{bmatrix}$$

$$= (z_j - c_j) + \Delta a_{lj} \sum_{i=1}^{m} c_i b_{il} \le 0$$

$$\text{if} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i b_{il} > 0 \Rightarrow \Delta a_{lj} \le \frac{-(z_j - c_j)}{\sum c_i b_{il} > 0}$$

$$\text{if} \quad \sum_{i=1}^{m} c_i b_{il} < 0 \Rightarrow \Delta a_{lj} \ge \frac{-(z_j - c_j)}{\sum c_i b_{il} < 0}$$

مثال: در مثال قبل $a_{21} \longrightarrow a_{21} + \Delta a_{21}$ ، حدود تغییرات Δa_{21} را بیابید.

$l = 2$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i b_{i2} = (1, -2, -1) \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/10 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \cancel{1/10} - 9/10 + 0 = -4/5$$

$$\Delta a_{21} \ge \frac{-(z_1 - c_1)}{-4/5} = \frac{-(1 - 1/5)}{-4/5} = \boxed{-1/4}$$

در مثال دیگر P_1 که یک بردار غیرپایه‌ای است و در جدول نهایی نشان داده شده از $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ به $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ تغییر کند، حدود تغییرات α چقدر باید باشد تا جواب بهینه بماند.

P_1 در پایه‌ی نهایی وجود ندارد، پس فقط $z_1 - c_1$ تغییر خواهد کرد

جواب ۲-۴ نیز جواب بهینه ی مسئله است.

$$z_1' - c_1 = c_B B^{-1} P_1' - c_1 = (1, -\tfrac{3}{2}, 0)\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= (-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{4}{5}, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{5} - \tfrac{4}{5}\alpha \le 0 \Rightarrow \boxed{\alpha \ge -\tfrac{1}{4}}$$

• اضافه کردن یک شرط جدید:

مثال: در مثال زیر مسئله برنامه ریزی خطی را در نظر بگیرید:

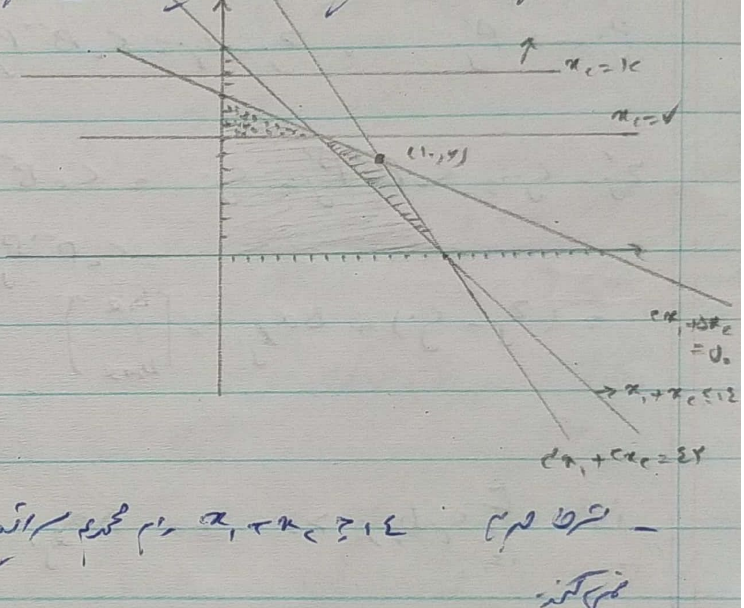
$$\min z = -5x_1 - 7x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 5x_2 \le 50$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 42$$

$$x_j \ge 0$$



- شرط جدید $x_1 + x_2 \ge 14$ را به محدودیت ها اضافه می کنیم. ملاحظه می شود که جواب بهینه تغییر نمی کند.
- شرط جدید $x_2 \ge 7$ را به محدودیت ها اضافه می کنیم. ملاحظه می شود که جواب بهینه تغییر می کند و به صورت جواب بهینه ی دیگری در می آید.
- شرط جدید $x_2 \ge 12$ را به محدودیت ها اضافه می کنیم. که ملاحظه می شود که مسئله دیگر جواب شدنی ندارد.

- جدول نهایی سادک مسئله بدون شرط جدید به صورت زیر است.

پایه	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-7	6	0	1	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$
P_1	-5	10	1	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$
		-92	0	0	-1	-1

شرط جدید $x_1 + x_2 \ge 14$ که به صورت $x_1 + x_2 - x_5 = 14$

است را به جدول نهایی سادک اضافه می کنیم. در P_5 در پایه مستقر می شود.

پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	۷-	۶	۰	۱	۳/۱۱	۲/۱۱-	۰
P_1	۵-	۱۰	۱	۰	۲/۱۱-	۵/۱۱	۰
P_5	۰	۱۴	۱	۱	۰	۰	۱-
α		۹۲-	۰	۰	۱-	۱-	۰

ملاحظه می‌شود که جدول حاصل
فرم استاندارد یک جدول سادک
را ندارد. که باید آن را به فرم
استاندارد جدول سادک در آورد.

سطر ۳ × منفی	۱۴-	۱-	۱-	۰	۰	۱
سطر ۲ + سطر ۳	۴-	۰	۱-	۲/۱۱-	۵/۱۱	۱
سطر ۱ + سطر ۳	۲	۰	۰	۱/۱۱	۳/۱۱	۱

پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	۷-	۶	۰	۱	۳/۱۱	۲/۱۱-	۰
P_1	۵-	۱۰	۱	۰	۲/۱۱-	۵/۱۱	۰
P_5	۰	۲	۰	۰	۱/۱۱	۳/۱۱	۱
α		۹۲-	۰	۰	۱-	۱-	۰

جواب بهینه هیچ تغییری نکرده است.

- حال اگر شرط جدید $x_2 \geq 7$ را اضافه کنیم $x_2 - x_5 = 7$

پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	۷-	۶	۰	۱	۳/۱۱	۲/۱۱-	۰
P_1	۵-	۱۰	۱	۰	۲/۱۱-	۵/۱۱	۰
P_5	۰	۷	۰	۱	۰	۰	۱-
α		۹۲-	۰	۰	۱-	۱-	۰

سطر ۳ × منفی	۷-	۰	۱-	۰	۰	۱
سطر ۱ + سطر ۳	۱-	۰	۰	۳/۱۱	۲/۱۱-	۱

پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	۷-	۶	۰	۱	۳/۱۱	۲/۱۱-	۰
P_1	۵-	۱۰	۱	۰	۲/۱۱-	۵/۱۱	۰
P_5	۰	۱-	۰	۰	۳/۱۱	۲/۱۱-	۱
α		۹۲-	۰	۰	۱-	۱-	۰

ملاحظه می‌شود که $z_j - c_j \leq 0$ ؟
شرط بهینگی جواب برقرار است اما
جواب بهینه جدول جدید جواب $x \geq 0$ ندارد.

برای پیدا نمودن جواب بهینه که شرط امکان‌پذیری حفظ شود از روش دوگان سادک استفاده
می‌کنیم. در این روش ابتدا سطر متغیرهای منفی x_0 را از پایه خارج می‌کنیم
$x_i \geq 0$ مثلاً

سپس بردار متناظر با $\theta=\min\limits_{x_{rj}<0}\left(\frac{z_j-c_j}{x_{rj}<0}\right)=\frac{z_k-c_k}{x_{rk}}$ یعنی P_k را وارد پایه می‌کنیم.

حال فرمول تغییر عنصر محوری را اعمال می‌کنیم تا جواب جدید بدست آید و این عمل ادامه می‌یابد تا یک جواب شدنی بهینه بدست آید یا اینکه نتیجه بگیریم که مسأله جدید جواب شدنی ندارد.

پایه	C_B	P_0	P_1 (-5)	P_2 (-7)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (0)
P_2	-7	7	0	1	0	0 $-\frac{2}{11}$	-1
P_1	-5	$\frac{15}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0 $\frac{5}{11}$	$\frac{5}{2}$
P_4	0	$\frac{11}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{11}{2}$
∝		$-\frac{173}{2}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{11}{2}$

P_5 خارج و P_4 وارد پایه می‌شود

جواب جدید که شدنی و بهینه است را داریم.

حال اگر شرط $x_2 \geq 12$ یعنی $x_2 - x_5 = 12$ را اضافه کنیم داریم:

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-7	6	0	1	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0
P_1	-5	10	1	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0
P_5	0	12	0	1	0	0	-1
∝		-92	0	0	-1	-1	0

سطر ۳ × منفی   -12   0   -1   0   0   1

سطر ۱ + سطر ۳   -6   0   0 $\frac{3}{11}$ $-\frac{2}{11}$ 1

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-7	6	0	1	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0
P_1	-5	10	1	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0
P_5	0	-6	0	0	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	1
∝		-92	0	0	-1	-1	0

$\longrightarrow$ P_5 خارج و P_4 وارد پایه می‌شود

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-7	12	0	1	0	0 $-\frac{2}{11}$	-1
P_1	-5	-5	1	0	$\frac{1}{2}$	0 $\frac{5}{11}$	$\frac{5}{2}$
P_4	0	33	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{11}{2}$
∝		-59	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

دوگان شدنی برقرار است ولی جواب شدنی نیست. $x_1<0$ و P_1 باید از پایه خارج شود اما x_1 ستون منفی ندارد. پس مسأله جواب شدنی ندارد.

حال اگر پایه‌ای داشته باشیم $B=[P_1 \dots P_m]$ به طوری که اساس
که عنصر $B^{-1}b$ منفی بوده و در (۴) صدق کند یعنی به ازای j ها $z_j - c_j = c_B B^{-1} P_j - c_j \le 0$
مرکز بسته در این صورت شدنی نیست و جواب ما غیرقابل قبول است
... $x_i < 0$ ... غیر قابل قبول بودن جواب ... شدنی
... در روش دوگان سیمپلکس استفاده می‌کنیم.

در این روش ابتدا منفی‌ترین $x_i < 0$ را از پایه خارج شده و در بردار ستون
$\theta = \min \frac{z_j - c_j}{x_{rj} < 0}$ وارد می‌شود.

مثال: $\min z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$
s.t.

$\max z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3$
s.t.
$x_1 + 3x_3 \ge 3$
$2x_2 + 2x_3 \ge 5$
$x_j \ge 0$

$\Rightarrow$
$x_1 + 3x_3 - x_4 = 3$
$2x_2 + 2x_3 - x_5 = 5$
$x_j \ge 0$

$\max z = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3$
s.t.
$-x_1 - 3x_3 + x_4 = -3$
$-2x_2 - 2x_3 + x_5 = -5$
$x_j \ge 0$

			4	12	18	0	0
پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_4	0	-3	-1	0	-3	1	0
P_5	0	-5	0	-2	-2	0	1
z		0	-4	-12	-18	0	0

مشاهده می‌کنیم $z_j - c_j$ ها کمتر یا مساوی صفر هستند یعنی جواب بهینه است اما غیر قابل قبول است. چون $x_i < 0$ داریم، از روش سیمپلکس دوگان استفاده می‌کنیم.

$\theta = \min \left(\frac{z_j - c_j}{x_{rj} < 0} \right) = \min \left(-, \frac{-12}{-2}, \frac{-18}{-2} \right) = 6$ ابتدا P_5 خارج می‌شود.
P_2 وارد می‌شود.

			4	12	18	0	0
پایه	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_4	0	-3	-1	0	-3	1	0
P_2	12	$5/2$	0	1	1	0	$-1/2$
z		30	-4	0	-6	0	-6

P_4 خارج

$\theta = \min \left(\frac{z_j - c_j}{x_{rj}} \right) = \min \left(\frac{-4}{-1}, \frac{-6}{-3} \right) = 2$
$x_{rj} < 0$

P_3 وارد می‌شود.

پایه	C_B	P_0	P_1	P_2	P_4	P_3	P_5
P_4	۱۸	۱	۱/۴	۰	۱	-۱/۴	۰
P_2	۱۲	۳/۲	-۱/۴	۱	۰	۱/۴	-۱/۲
Z		۳۶	-۲	۰	۰	-۲	-۵

هر جواب بهینه را در جدول
بدست آورده ایم

[illegible] ≥ [illegible] [illegible] ساده استفاده کنیم

[illegible] ≤ [illegible] [illegible] استفاده کنیم

— [illegible]

مثال: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر که جدول نهایی آن به روش سیمپلکس به دست آمده است مفروض می‌باشد.

$$\min Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$

$$x_j \geq 0$$

		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
B	c_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
	α	$z_0 = -11$	-1/5	0	0	-4/5	-12/5	0

$z_j - c_j$

جدول را کامل کنید و جواب بهینه مسأله را بدست آورید.

برای تعیین بردارهای P_0 ، P_2 ، P_4 و P_5 که همان از رابطه $X_j = B^{-1}P_j$ استفاده می‌کنیم.

$$B^{-1} = [X_1, X_4, X_6] \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ ستون P_0

$$X_2 = B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} & B^{-1} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ ستون P_2

$$X_5 = B^{-1}P_5 = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ ستون P_5

$$z_1 - c_1 = c_0 X_1 - c_1 = (1 \ \ -3 \ \ 0)\begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1/5$$

$$z_4 - c_4 = c_0 X_4 - c_4 = (1 \ \ -3 \ \ 0)\begin{bmatrix} 1/10 \\ 3/10 \\ -1/2 \end{bmatrix} - 0 = -4/5$$

$$z_5 - c_5 = c_0 X_5 - c_5 = (1 \ \ -3 \ \ 0)\begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 10 \end{bmatrix} - 2 = -2/5 - 2 = -12/5$$

$$X^* = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$$

$$Z^* = -11$$

مسأله دارای جواب بهینه مشخص منحصر بفرد می‌باشد.