مسائل فصل چهارم

۱. در مسائل ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۳، ۳۴ و ۳۵ از مسائل فصل دوم، در صورت وجود
الف) براوردگر نااریب پارامتر (های) مجهول را به دست آورید.
ب) MVUE پارامتر (های) مجهول را به دست آورید.

۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta_1, \theta_2)$ باشد. UMVUE پارامتر $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ را به دست آورید.

۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. نشان دهید
الف) $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ براوردگر نااریب μ است اگر و فقط اگر $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ باشد.
ب) $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ براوردگر نااریب μ با کمترین واریانس است اگر و فقط اگر $a_i = \frac{1}{n}$، $i = 1, 2, \cdots, n$، باشد.

۴. فرض کنید X_1, X_2 یک نمونهٔ تصادفی ۲ تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد.
الف) یک براوردگر نااریب برای λ به دست آورید.
ب) بر مبنای میانگین هندسی X_1، X_2، یعنی $\sqrt{X_1 X_2}$، یک براوردگر نااریب برای λ به دست آورید.

۵. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. براوردگرهای $T_1(\boldsymbol{X}) = 2\bar{X}$ و $T_2(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$ را برای θ در نظر گیرید.
الف) MSE براوردگرهای T_1 و T_2 را به دست آورید.
ب) نشان دهید برای $n = 2$، MSE براوردگرها با هم برابر است.
ج) برای $n = 3$ کدام یک از براوردگرها را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

۶. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta, 2\theta)$ باشد.
الف) MLE پارامتر θ، یعنی $\hat{\theta}$، را به دست آورید.
ب) بر اساس $\hat{\theta}$، یک براوردگر نااریب برای θ به دست آورید و آن را $\delta(\boldsymbol{X})$ بنامید.

ج) MSE براوردگرهای $\hat{\theta}$ و $\delta(\boldsymbol{X})$ را به دست آورده و با هم مقایسه کنید.
د) برای مقادیر ثابت a و b ، یک براوردگر نااریب θ به صورت $aX_{(1)}+bX_{(n)}$ پیدا کنید به طوری که $P_\theta(\frac{1}{2}X_{(n)} \leq aX_{(1)}+bX_{(n)} \leq X_{(1)}) = 1$ باشد. چرا احتمال فوق باید برابر یک باشد؟

۷. فرض کنید X_1, X_2 یک نمونهٔ تصادفی دو تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. آماره‌های زیر را در نظر گیرید.

$$T_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 \ , \ T_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2 \ , \ T_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

الف) نشان دهید T_i ، $i = 1, 2, 3$ ، براوردگر نااریب θ است.
ب) برای تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $3\theta^2$ ، تابع مخاطره براوردگرها را محاسبه کنید.

۸. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. تحقیق کنید آیا $e^{-\bar{X}}$ یک براوردگر نااریب $e^{-\theta}$ است؟ در صورت منفی بودن جواب، یک براورگر نااریب $e^{-\theta}$ را به دست آورید. کارایی براوردگر نااریب را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ ، $\theta = (\mu, \sigma^2)$ نامعلوم، باشد. اگر برای مقدار مثبت و ثابت c ، $\tau(\theta)$ در رابطهٔ زیر صدق کند، UMVUE پارامتر $\tau(\theta)$ را به دست آورید.

$$\int_{\tau(\theta)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\} dx = c$$

۱۰. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد.
الف) نشان دهید $E(X_1|\bar{X})$، UMVUE پارامتر μ است.
ب) UMVUE پارامتر $\frac{\mu}{\sigma}$ را به دست آورید.

۱۱. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای بریده در صفر با پارامترهای n و p باشد. UMVUE $\frac{p}{1-q^n}$ را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. UMVUE پارامتر $\gamma(\lambda) = e^{-k\lambda}$ ، که در آن k مقدار مثبت و معلومی است، را به دست آورید.

۱۳. فرض کنید $Z_1, \cdots, Z_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(0, \theta^2)$ باشد. اگر $X_i = |Z_i|$ ، $i = 1, \cdots, n$ ، تعریف شود، در صورت وجود، بر اساس $X_1, \cdots, X_n$
UMVUE پارامتر θ^2 را به دست آورید.

۱۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $P_a(\alpha, \beta)$ باشد. اگر تابع زیان براورد α برابر با $L(\alpha, \delta) = (\frac{\delta}{\alpha} - 1)^2$ باشد

الف) تابع مخاطره برای MLE و UE پارامتر α را به دست آورید.

ب) در کلاس براوردگرهای به شکل $c\hat{\alpha}$ بهترین مقدار c را طوری بیابید که دارای کمترین مقدار تابع مخاطره باشد.

۱۵. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, \theta^2)$ باشد. آیا $\bar{X}$ براوردگر MVU پارامتر θ است؟ (راهنمایی: فرض کنید T یک براوردگر نااریب صفر باشد، $Var(a\bar{X} + (1-a)T)$ را محاسبه کنید.)

۱۶. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, \theta)$ باشد. نشان دهید $\bar{X}$، MVUE پارامتر θ نیست.

۱۷. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ (1-\theta)^2\theta^{x-2} & x = 2, 3, 4, \cdots \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

الف) نشان دهید آمارهٔ $T(X) = I_{\{2\}}(X)$ ، MVUE پارامتر $(1-\theta)^2$ است.

ب) نشان دهید آمارهٔ $S(X) = I_{\{1\}}(X)$ یک براوردگر نااریب θ است، اما MVUE پارامتر θ نیست.

۱۸. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2\theta(1-\theta) & x = -1 \\ \theta^x(1-\theta)^{3-x} & x = 0, 1, 2, 3 \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

الف) آماره بسنده می‌نیمال برای θ را به دست آورید. آیا آمارهٔ به دست آمده کامل است؟
ب) کلاس براوردگرها نااریب صفر را تعیین نمائید.
ج) در صورت وجود، MVUE پارامترهای $\theta(1-\theta)$ و θ را به دست آورید.

۱۹. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $NB(r,\theta)$ ، r معلوم و θ نامعلوم، باشد. UMVUE پارامتر $\frac{1}{\theta}$ را، در صورت وجود، به دست آورید.

۲۰. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. نشان دهید UMVUE پارامتر $e^{-\lambda}$ برابر با $[(1-\frac{1}{\Sigma X_i})^+]^{n-1}$ ، که در آن $a^+ = \max(0, a)$ است.

۲۱. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, a\theta^2)$ ، a معلوم و $\theta > 0$ نامعلوم باشد. اگر $\bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma X_i$ و $S^2 = \Sigma(X_i - \bar{X})^2$ باشد،
الف) دو براوردگر نااریب θ بر پایه $\bar{X}$ و S^2 را به دست آورید.
ب) MSE براوردگرهای به دست آمده را محاسبه و با هم مقایسه کنید. کدام یک بهتر است؟ چرا؟

۲۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. UMVUE پارامترهای $e^{-2\lambda}$ و $\lambda^2 e^{-\lambda}$ را به دست آورید.

۲۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ ، n متغیر تصادفی مستقل باشند به طوری که $X_i \sim P(\lambda b_i)$ b_i ها مقادیر ثابت، مثبت و معلوم، $i = 1, \cdots, n$ و λ نامعلوم است.
الف) بهترین براوردگر نااریب λ را به دست آورید.
ب) نشان دهید $\bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma X_i$ ، بهترین براوردگر نااریب λ است اگر و فقط اگر $\Sigma b_i = n$ باشد.

۲۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با میانگین θ و واریانس متناهی باشد. اگر $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ بهترین براوردگر نااریب θ و T' یک براوردگر نااریب θ باشد، نشان دهید $Var_\theta(T) = Cov_\theta(T, T')$.

۲۵. فرض کنید T_2 و T_1 دو براوردگر نااریب θ با واریانس $\alpha\sigma^2$ ، $\alpha > 1$ ، باشند به طوری که σ^2 واریانس بهترین براوردگر نااریب θ است. نشان دهید:

$$corr(T_۱, T_۲) \geq \frac{۲-\alpha}{\alpha}$$

۲۶. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $Y_۱, \cdots, Y_m$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل با توزیعهای به ترتیب $N(\mu, \sigma_۱^۲)$ و $N(\mu, \sigma_۲^۲)$ باشند که در آن هر سه پارامتر μ ، $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ نامعلوم‌اند. با انتخاب $\Delta = \frac{\sigma_۲^۲}{\sigma_۱^۲}$ و $\theta = \frac{m}{n}$ ، نشان دهید

الف) اگر Δ معلوم باشد، $T_۱ = \alpha \bar{X} + (۱-\alpha)\bar{Y}$ که در آن $\alpha = \frac{\Delta}{\Delta + \theta}$ است، UMVUE پارامتر μ است.

ب) اگر Δ نامعلوم باشد، $T_۲ = \frac{۱}{۱+\theta}(\bar{X} + \theta \bar{Y})$ براوردگر ناااریب μ است و یک براوردگر بهینه است اگر Δ در همسایگی ۱ باشد.

۲۷. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \frac{a(x)}{h(\theta)} \theta^x \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, \cdots \quad , \quad \theta > ۰$$

UMVUE پارامتر θ^r ، $r \in N$ ، را به دست آورید.

۲۸. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $B(۲, \theta)$ باشد. در صورت وجود

الف) UMVUE پارامترهای θ و $\theta^۲$ را به دست آورید.

ب) MSE براوردگرهای بدست آمده را محاسبه کنید.

ج) آیا واریانس براوردگرهای بدست آمده با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

۲۹. فرض کنید $X \sim HG(N, M; n)$ باشد. در صورت وجود،

الف) اگر N معلوم باشد، UMVUE پارامتر M را به دست آورید.

ب) اگر M معلوم باشد، UMVUE پارامتر N را به دست آورید.

۳۰. در مسئله ۱ ، تحقیق کنید آیا واریانس MVUE پارامتر مجهول به دست آمده با کران پایین کرامر- رائو برابر است یا نه؟ کارایی براوردگر نااریب θ را محاسبه کنید.

۳۱. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $E(\theta, ۱)$ ، $\theta \in R$، باشد.

الف) در صورت وجود، MLE پارامتر θ را به دست آورید.

ب) آیا $\hat{\theta}$ یک براوردگر نااریب است؟

ج) آیا $\hat{\theta}$ یک براوردگر سازگار است

د) برآوردگر نااریب θ را به دست آورید.

هـ) واریانس برآوردگر نااریب به دست آمده را محاسبه کنید.

و) کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب θ را محاسبه کنید.

ز) در مورد نتایج به دست آمده در هـ و و اظهارنظر کنید.

۳۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $E(\theta, \theta)$ باشد.

الف) برآوردگرهای نااریب θ و θ^2 را بر حسب $T = X_{(1)}$ و $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ به دست آورید.

ب) آیا برآوردگرهای به دست آمده MVUE هستند؟ چرا؟

ج) آیا برآوردگرهای به دست آمده سازگار هستند؟ چرا؟

د) کارآیی نسبی دو برآوردگر به دست آمده در (الف) را به دست آورید.

هـ) شرط لازم و کافی برای اینکه $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ برآوردگر نااریب θ باشد را به دست آورید.

و) شرط لازم و کافی برای اینکه $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ در این کلاس برآوردگر نااریب θ با کمترین واریانس باشد را به دست آورید.

۳۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع مخلوط با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \theta f_1(x) + (1-\theta) f_2(x)$ ، که در آن $0 < \theta < 1$ ، f_1 و f_2 توابع چگالی معلوم‌اند که دامنهٔ آنها بستگی به θ ندارد، باشد. کران پایین کرامر- رائو در برآورد نااریب θ بر پایه نمونهٔ تصادفی n تایی را به دست آورید.

۳۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $B(1, \theta)$ باشد.

الف) کران پایین کرامر- رائو را برای واریانس برآوردگر نااریب $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ به دست آورید.

ب) آیا واریانس برآوردگر نااریب $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

۳۵. نشان دهید تحت "شرایط مطلوب"

$$E_\theta\{[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_\theta(X)]^2\} = -E_\theta\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f_\theta(X)\}$$

۳۶. فرض کنید $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ باشد. اطلاع فیشر $I(\rho)$ ، را به دست آورید.

۳۷. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$i)\quad f_\theta(x) = \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\ ,\quad x > 0\ ,\quad \theta > 0$$

$$ii)\quad f_\theta(x) = \frac{\ln\theta}{\theta-1}\theta^x \ , \ 0<x<1 \ , \ \theta>1$$

الف) تحقیق کنید آیا براوردگر نااریب θ^2 وجود دارد که واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد.

ب) برای چه توابعی از θ ، مثلاً $\gamma(\theta)$ ، واریانس براوردگر نااریب $\gamma(\theta)$ با کران پایین کرامر- رائو برابر است.

۳۸. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{x+1}{\theta(\theta+1)}e^{-\frac{x}{\theta}} \ , \ x>0 \ , \ \theta>0$$

الف) در صورت وجود، براوردگر نااریب $\gamma_1(\theta) = \frac{2\theta^2-1}{\theta+1}$ و $\gamma_2(\theta) = \frac{(3+2\theta)(2+\theta)}{\theta+1}$ را به دست آورید که واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر باشد.

ب) کلاس توابعی از θ را به دست آورید که واریانس براوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر-رائو برابر است.

۳۹. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $C(\theta,1)$ باشد. نشان دهید کران پایین کرامر- رائو در براورد نااریب پارامتر θ برابر با $\frac{2}{n}$ است. کارایی مجانبی میانه نمونه را در براورد پارامتر مکانی θ محاسبه کنید.

۴۰. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد.

کران پایین کرامر-رائو برای واریانس براوردگرهای نااریب θ، θ^2 ، $P_\theta(X_1>0)$ و $P_\theta(X_1>2\theta)$ را به دست آورید.

۴۱. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با چگالی زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} \ , \ x>0 \ , \ \theta>0$$

الف) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس براوردگرهای نااریب $\frac{1}{\theta}$ ، e^θ و θ^2+2 را به دست آورید.

ب) UMVUE پارامتر $\frac{1}{\theta}$ را به دست آورید.

ج) در صورت وجود، براوردگر نااریبی از θ را بیابید که واریانس آن با کران پایین

کرامر-رائو برابر باشد.

د) برای چه کلاسی از برآوردگرها، واریانس آن با کران پایین کرامر- رائو برابر است؟

ه) برای چه کلاسی از توابع θ ، واریانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر-رائو برابر است؟

۴۲. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \exp\{-(x-\theta) - \exp[-(x-\theta)]\} \ , \ x \in R \ , \ \theta \in R$$

الف) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگر نااریب θ را به دست آورید.

ب) در صورت وجود، تابعی از θ را به دست آورید که واریانس برآوردگر نااریب آن با کران پایین کرامر-رائو برابر باشد.

۴۳. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $Ge(\theta)$ باشد.

الف) UMVUE پارامترهای $\theta^{-۱}$ و $\theta^{-۲}$ را، در صورت وجود، به دست آورید.

ب) کران پایین کرامر- رائو برای واریانس برآوردگر نااریب $(\theta - ۱)$ را به دست آورید.

ج) در صورت وجود، UMVUE پارامتر $\frac{۱-\theta}{\theta}$ را به دست آورید.

۴۴. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = (\theta + ۱)x^\theta \ , \ ۰ < x < ۱ \ , \ \theta > -۱$$

کلاس توابعی از θ را که واریانس برآوردگر نااریب آنها با کران پایین کرامر- رائو برابر است را به دست آورید.

۴۵. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از جمعیتی با میانگین μ و واریانس متناهی $\sigma^۲$ باشد. نشان دهید $T(\boldsymbol{X}) = \frac{۲}{n(n+۱)} \sum_{i=۱}^n iX_i$ یک برآوردگر سازگار برای μ است.

۴۶. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $U(۰, \theta)$ باشد. نشان دهید $T(\boldsymbol{X}) = (\Pi_{i=۱}^n X_i)^{\frac{۱}{n}}$ یک برآوردگر سازگار برای $\frac{\theta}{e}$ است. اگر $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\lambda)$ باشد، T برآوردگر نااریب کدام برآوردپذیر است؟