مسائل فصل سوم

۱. در مسائل ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۳۳، ۳۴ و ۳۵ از مسائل فصل دوم، در صورت وجود، MME و MLE پارامتر (های) مجهول را به دست آورید. تحقیق کنید آیا براوردگر به دست آمده یک آماره بسنده است یا نه؟

۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع زیر باشد. در صورت وجود، MME و MLE پارامتر مجهول را به دست آورید.

$$i)\quad U(\{1,2,\cdots,\theta\})\ ,\quad \theta\in\{1,2,\cdots,\theta_0\}\ ,\quad \theta_0\in N$$

$$ii)\quad B(1,\theta)\ ,\quad \theta\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$$

$$iii)\quad B(1,\theta)\ ,\quad \theta\in[0,\frac{1}{2}]$$

$$iv)\quad Beta(1,\theta)\ ,\quad \theta>0$$

$v)\quad N(0,\theta)\ ,\quad 0<\theta<b\ ,$ معلوم b

۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. در صورت وجود MME و MLE پارامتر نامعلوم θ را به دست آورید.

$$i)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1-\theta}{2} & x=y_1\\ \frac{1}{2} & x=y_2\\ \frac{\theta}{2} & x=y_3\end{cases}\qquad 0\le\theta\le 1$$

$$ii)\quad f_\theta(x)=\frac{1}{2}(1-e^{-\theta})^{-1}\exp\{-|x|\}\ ,\ |x|<\theta\ ,\ \theta>0$$

$$iii)\quad f_\theta(x)=\theta(1-\theta)^{-1}x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}\ ,\ 0<x\le 1\ ,\ \theta\in(\frac{1}{2},1)$$

$$iv)\quad f_\theta(x)=\beta\exp\{-(\theta+\beta x)\}[1+\exp\{-(\theta+\beta x)\}]^{-2}\ ,$$

$x\in R\ ,\ \theta\in R\ ,$ معلوم β

$$v)\quad f_\theta(x)=\frac{x}{\theta^2}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}\ ,\ x>0\ ,\ \theta>0$$

$$vi)\quad f_\theta(x)=2\theta^2 x\ ,\quad 0<x\le\frac{1}{\theta^2}\ ,\quad \theta>0$$

$$vii)\quad f_\theta(x)=\frac{2x}{1-\theta^2}\ ,\quad \theta\le x\le 1\ ,\quad -1<\theta>1$$

۴. فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با توابع احتمال زیر باشد، $\theta \in \{۱,۲,۳\}$. براورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f_۱(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$
$f_۲(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰
$f_۳(x)$	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

۵. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ باشد. در صورت وجود، MME و MLE پارامترها را به دست آورید.

$$i)\quad f_{\boldsymbol{\theta}}(x)=\frac{۱}{\theta_۲}\exp\{-(x-\theta_۱)/\theta_۲\}\ ,\ x\geq\theta_۱\ ,\qquad \boldsymbol{\theta}=(\theta_۱,\theta_۲)\in R\times R^+$$

$$ii)\quad f_{\boldsymbol{\theta}}(x)=\frac{\theta_۱ x^{\theta_۱-۱}}{\theta_۲^{\theta_۱}}\ ,\ ۰<x<\theta_۲\ ,\ \boldsymbol{\theta}=(\theta_۱,\theta_۲)\in R\times R^+$$

$$iii)\quad f_{\boldsymbol{\theta}}(x)=\begin{cases}\theta_۱ & x=۱\\ \\ \frac{۱-\theta_۱}{\theta_۲-۱} & x=۲,\cdots,\theta_۲\end{cases}\qquad \boldsymbol{\theta}=(\theta_۱,\theta_۲),\ ۰\leq\theta_۱\leq۱\ ,\ \theta_۲\in N$$

۶. از چهار جامعهٔ نرمال با واریانس یکسان $\sigma^۲$، هر کدام یک نمونهٔ تصادفی n تایی انتخاب شده است. اگر میانگین چهار جامعه به ترتیب $a+b+c$، $a+b-c$، $a-b+c$ و $a-b-c$ باشند، MLE و MME پارامترهای a، b، c و $\sigma^۲$ را به دست آورید.

۷. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $\Gamma(\alpha,\beta)$ باشد، به طوری که $\alpha>۰$ و $\beta>۰$ هر دو نامعلوم‌اند. MME و MLE پارامترهای α و β را، در صورت وجود به دست آورید. (راهنمایی: فرض کنید، برای x های بزرگ $\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x)\approx\ln x-\frac{۱}{۲x}$)

۸. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $IG(\mu,\lambda)$ باشد، به طوری که $\mu>۰$، $\lambda>۰$ است. در صورت وجود، MME و MLE پارامترهای μ و λ را به دست آورید.

۹. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ ، $\lambda > 0$ ، باشد. الف: MLE پارامتر $P_\lambda(X_1 \leq 1)$ را به دست آورده، نشان دهید که یک براوردگر سازگار است.

ب: MLE پارامتر $e^{-\lambda}$ را به دست آورید.

۱۰. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد، در صورت وجود، MLE پارامتر $P_\theta(X > 0)$ را به دست آورید.

۱۱. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $E(\alpha, \beta)$ باشد، در صورت وجود، MLE پارامتر $P_{\alpha,\beta}(X_1 > 0)$ را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_m$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ باشند. MLE پارامترهای مجهول را در هر یک از حالات زیر به دست آورد. و توزیع هر یک را تعیین نمائید.

الف: $\mu_1 = \mu_2$ ، σ_1^2 و σ_2^2

ب: μ_1, μ_2 و $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

ج: $\mu_1 - \mu_2$ و $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

۱۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $Beta(\alpha, \beta)$ باشد، که در آن β معلوم و $\alpha > 0$ نامعلوم است.

الف: MLE پارامتر α را وقتی که $\beta = 1$ باشد به دست آورید.

ب: MLE پارامتر α را وقتی که $\beta = 2$ باشد به دست آورید.

ج: MLE پارامتر $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ را در هر دو حالت فوق به دست آورید.

۱۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_m$ یک نمونهٔ تصادفی m تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, \lambda\sigma^2)$ باشد، به طوری که دو نمونهٔ مستقل از هم، $\mu \in R$ و $\sigma > 0$ و $\lambda > 0$ است. MLE پارامتر λ را به دست آورید اگر

الف: پارامترهای μ و σ^2 هر دو معلوم باشند.

ب: پارامترهای μ و σ^2 هر دو نامعلوم باشند.

۱۵. فرض کنید $X_1, \cdots, X_k$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند. اگر X_i دارای توزیع $B(n_i, \theta)$ ، n_i معلوم، $i = 1, 2, \cdots, k$ و $\theta \in [0, 1]$ باشد، MLE پارامتر θ را به دست آورید.

۱۶. فرض کنید $(X_1,\cdots,X_k) \sim M(n,\theta_1,\cdots,\theta_k)$، MLE پارامترهای $\theta_1,\cdots,\theta_k$ را به دست آورید.

۱۷. فرض کنید $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ باشد. MLE پارامتر ρ را به دست آورید، اگر

الف: پارامترهای μ_1 ، μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 همگی معلوم باشند.

ب: پارامترهای μ_1 ، μ_2 ، σ_1^2 و σ_2^2 همگی نامعلوم باشند.

۱۸. فرض کنید $X \sim E(\lambda)$ و $Y \sim E(\mu)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. هم‌چنین فرض کنید، فقط مقادیر Z و W که به صورت زیر تعریف شده‌اند، قابل مشاهده است.

$$Z=\min(X,Y) \;\; ; \;\; W=\begin{cases} 1 & Z=X \\ 0 & Z=Y \end{cases}$$

حال فرض کنید، (Z_i,W_i) ، $i=1,\cdots,n$ ، n مشاهدهٔ مستقل از توزیع (Z,W) باشند. در صورت وجود، MLE پارامترهای λ و μ را به دست آورید.

۱۹. فرض کنید $f_i(x)$ یک تابع چگالی احتمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 ، $i=1,2$، باشد. همچنین فرض کنید Z_2 و Z_1 یک نمونهٔ تصادفی ۲ تایی از توزیعی با تابع چگالی مخلوط $f_\theta(x)=\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x)$ ، $\theta\in[0,1]$ باشد. اگر μ_i و σ_i^2 ، $i=1,2$ ، معلوم باشند، MME و MLE پارامتر θ را به دست آورید.

۲۰. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x)=a(\theta)b(x) \;\; , \;\; 0<x<\theta$$

به طوری $a(\cdot)$ و $b(\cdot)$ دو تابع مثبت‌اند. در صورت وجود، MLE پارامتر θ را به دست آورید.

۲۱. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $U(\theta_1,\theta_2)$ ، $-\infty<\theta_1<\theta_2<\infty$، باشد. در صورت وجود، MME و MLE پارامترهای مجهول را به دست آورید.

۲۲. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع $P(\theta)$ ، $\theta > ۰$ باشد.

الف: MLE پارامتر θ را به دست آورید اگر حداقل یکی از مشاهدات مخالف صفر باشد.

ب: نشان دهید MLE پارامتر θ ، در صورتی که همهٔ مشاهدات صفر باشند، وجود ندارد.

۲۳. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $E(\frac{۱}{\theta})$ باشد. MLE پارامتر $E_\theta(\frac{۱}{\sqrt{X}})$ را به دست آورید.

۲۴. فرض کنید $U \sim N(۰, ۱)$ ، $V \sim N(۰, \theta)$ و $W \sim N(۰, ۱)$ سه متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $X = U + V$ و $Y = V + W$ باشند.

الف: نشان دهید (X, Y) دارای توزیع $N(۰, ۰, ۱ + \theta, ۱ + \theta, \frac{\theta}{۱+\theta})$ است.

ب: MLE پارامتر $h(\theta) = \frac{۱}{۱+۲\theta}$ را بر اساس یک نمونهٔ تصادفی n تایی از (X, Y) به دست آورید.

۲۵. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با چگالی زیر باشد.

$$f_\theta(x) = (۱ - \theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x}} \quad , \quad ۰ < x < ۱ \quad , \quad ۰ < \theta < ۱$$

براوردگرهای MM و ML پارامتر θ را به دست آورید.

۲۶. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_۴$ یک نمونهٔ تصادفی ۴ تایی از توزیع برنولی با پارامتر θ، به طوری که $\theta \in \{\frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۴}\}$ ، باشد. براورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

۲۷. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}\exp\{-|x-\theta|\} & x < \theta \\ \frac{۱}{۳} & \theta \le x < \theta + ۱ \\ \frac{۱}{۳}\exp\{-|x-(\theta+۱)|\} & \theta + ۱ \le x \end{cases}$$

براوردگرهای MM و ML پارامتر θ را به دست آورید.

۲۸. برای براورد نسبت دانشجویانی که سیگار می‌کشند، یک نمونهٔ تصادفی ۱۰۰ تایی انتخاب می‌شود. اگر از این نمونه ۳۵ نفر سیگاری باشند، براورد ML سیگاریها را به دست آورید.

۲۹. تعداد موفقیتها در ۷ بار مستقل از آزمایش برنولی با پارامتر θ برابر ۴ شده است. اگر $\theta \in \{۰/۱, ۰/۲, \cdots, ۰/۹\}$ باشد، براورد ML پارامتر θ را به دست آورید.

۳۰. شخصی هر روز به تصادف حداقل θ دقیقه و حداکثر ۱۵ دقیقه، برای رفتن به محل کار خود، منتظر تاکسی می‌شود. هفتهٔ گذشته مدت انتظار او ۱۳،۱۱،۱۰،۹،۶،۵ و ۳ دقیقه بوده است. براورد ML و MM پارامتر θ را به دست آورید.

۳۱. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P_a(\alpha, \beta)$ باشد.
الف: با فرض معلوم بدون β، MLE پارامتر α را به دست آورید.
ب: اگر تابع زیان به صورت زیر تعریف شود، تابع مخاطره $\hat{\alpha}$ را به دست آورید

$$L(\alpha, \delta) = (\frac{\delta}{\alpha} - ۱)^۲$$

ج: در کلاس براوردگرهای به فرم $c\hat{\alpha}$ که در آن $c > ۰$، مقدار $c_۰$ را طوری بیابید که $c_۰\hat{\alpha}$ دارای کمترین تابع مخاطره در کلاس مزبور باشد.

۳۲. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $U[۰, \theta]$ باشد که در آن $\theta \in \Theta = \{۱, ۲, \cdots\}$.
الف: در صورت وجود، MLE پارامتر θ را به دست آورید.
ب: تابع احتمال $\hat{\theta}$، MLE پارامتر θ، را به دست آورید.
ج: آیا $\hat{\theta}$ یک براوردگر سازگار است؟

۳۳. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. MLE میانه توزیع را به دست آورده و نشان دهید که این براوردگر یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال است

$$f_\theta(x) = \frac{۲x}{\theta^۲} \quad , \quad ۰ < x \leq \theta \quad , \quad \theta > ۰$$

۳۴. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_m$ و $Y_۱, \cdots, Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $E(\lambda)$ و $E(\theta\lambda)$ باشند. MLE پارامترهای λ و θ را به دست آورید.