## مسائل فصل دوم

۱. فرض کنید $X_1, X_2$ یک نمونه تصادفی ۲ تایی از توزیع $B(1,p)$ و $Y_1, Y_2, Y_3$ یک نمونه تصادفی سه تایی از توزیع $B(1,q)$، $q = 1-p$. اگر دو نمونه تصادفی مستقل از هم باشند، با استفاده از تعریف آماره‌های بسنده، تحقیق کنید آیا آماره $T = X_1 + Y_1 Y_2$ برای $p$ بسنده است؟

۲. فرض کنید $X_1, X_2, X_3, X_4$ یک نمونه تصادفی ۴ تایی از توزیع $B(1,p)$ باشد. با استفاده از تعریف، تحقیق کنید آیا آماره $U = X_1(X_3 + X_4) + X_2$ برای $p$ بسنده است؟

۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. در هر یک از موارد زیر،

**الف**: آمارهٔ بسندهٔ پارامتر (ها)را به دست آورید.

ب: آمارهٔ بسندهٔ مینیمال پارامتر (ها) را به دست آورید.

ج: تحقیق کنید آیا آمارهٔ بسندهٔ مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i)\quad f_{\alpha,\beta}(x) = (1-\beta)\beta^{x-\alpha}\ ,\quad x = \alpha, \alpha+1, \cdots, \alpha \in R\ ,\ 0 < \beta < 1$$

(کامل بودن برای $n = 1$)

$$ii)\quad f_\theta(x) = \binom{n+x-1}{x}\theta^n(1-\theta)^x\ ,\quad x = 0, 1, 2, \cdots, \theta \in (0,1)$$

$$iii)\quad f_\theta(x) = (\frac{\theta}{2})^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}\ ,\quad x = -1, 0, 1\ ,\quad \theta \in (0,1)$$

۴. فرض کنید $X$ دارای تابع احتمال زیر باشد. آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ را به دست آورید. تحقیق کنید آیا آمارهٔ بسندهٔ مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i)\ f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 1, 2 \\ \frac{1+\theta}{4} & x = 3 \\ \frac{1-\theta}{4} & x = 4 \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 1$$

$$ii)\ f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = -1 \\ (1-\theta)^2\theta^x & x = 0, 1, 2, \cdots \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 1$$

$$iii)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}-\theta & x=-۲\\ \frac{۱}{۴}-\frac{\theta}{۲} & x=-۱\\ \\ \frac{۱}{۴}+\frac{\theta}{۲} & x=۱\\ \frac{۱}{۴}+\theta & x=۲\end{cases}\qquad -\frac{۱}{۴}\leq\theta\leq\frac{۱}{۴}$$

$$iv)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-۱,۱\\ \\ ۱-۲\theta & x=۰\end{cases}\qquad ۰\leq\theta\leq\frac{۱}{۲}$$

$$v)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۲} & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{\theta}{۲} & x=y_۳\end{cases}\qquad ۰\leq\theta\leq ۱$$

$$vi)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۱\\ \frac{۱}{۲} & x=y_۲\\ \frac{۱}{۴}+\theta & x=y_۳\end{cases}\qquad -\frac{۱}{۴}\leq\theta\leq\frac{۱}{۴}$$

$$vii)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=y_۱,y_۲\\ \theta & x=y_۳,y_۴\\ \frac{۱}{۴}-\theta & x=y_۵,y_۶\end{cases}\qquad ۰\leq\theta\leq\frac{۱}{۴}$$

$$viii)\ \ f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱-\theta}{۱۲} & x=۱\\ \frac{۲-\theta}{۱۲} & x=۲\\ \frac{۳-\theta}{۱۲} & x=۳\\ \\ \frac{۱+\theta}{۱۲} & x=۴\\ \frac{۲+\theta}{۱۲} & x=۵\\ \frac{۳+\theta}{۱۲} & x=۶\end{cases}\qquad -۱\leq\theta\leq ۱$$

$$ix)\quad f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۱\\ \frac{۱-\theta}{۴} & x=۲\\ \\ \frac{۱-\theta}{۲} & x=۳\\ \frac{۳\theta}{۴} & x=۴\end{cases}\qquad ۰\le\theta\le ۱$$

$$x)\quad f_\theta(x)=\frac{\binom{\theta}{x}\binom{N-\theta}{n-x}}{\binom{N}{n}}\ ,\quad x=۰,۱,\cdots,\min(n,\theta)$$

۵. مسأله $(ix)-(i)$ ۴ را بر پایه یک نمونه تصادفی $n$ تایی پاسخ دهید.

۶. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. در هر یک از موارد زیر،

الف: آمارهٔ بسندهٔ پارامتر (ها) را به دست آورید.

ب: آمارهٔ بسندهٔ مینیمال پارامتر (ها) را به دست آورید.

ج: تحقیق کنید آیا آمارهٔ بسندهٔ مینیمال به دست آمده کامل است؟

$$i)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta}}\exp\{-\frac{۱}{۲\theta}(x-\theta)^۲\}\ ,\quad x\in R\ ,\quad \theta>۰$$

$$ii)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\theta^۲}}\exp\{-\frac{۱}{۲\theta^۲}(x-\theta)^۲\}\ ,\quad x\in R\ ,\quad \theta>۰$$

$$iii)\quad f_\theta(x)=\theta(۱+x)^{-(۱+\theta)}\ ,\quad x>۰\ ,\quad \theta>۰$$

$$iv)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{\theta}\ ,\quad \theta<x<۲\theta\ ,\quad \theta>۰$$

$$v)\quad f_\theta(x)=\frac{۲x}{\theta^۲}\ ,\quad ۰<x<\theta\ ,\quad \theta>۰$$

$$vi)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{۲}\exp\{-|x-\theta|\}\ ,\quad x\in R\ ,\quad \theta\in R$$

$$vii)\quad f_\theta(x)=\frac{۱}{۲\theta}\exp\{-|x|/\theta\}\ ,\quad x\in R\ ,\quad \theta>۰$$

$$viii)\quad f_\theta(x)=\exp\{-(x-\theta)+\exp[-(x-\theta)]\}\ ,\quad x\in R\ ,\quad \theta\in R$$

$$ix)\quad f_{\theta,\sigma^۲}(x)=\frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\sigma^۲}}\exp\{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(\ln x-\theta)^۲\}\ ,\quad x>۰\ ,$$

$$\theta\in R\ ,\quad \sigma>۰$$

$x)\quad f_{\theta,\sigma}(x) = \frac{۱}{\pi\sigma}[۱ + (\frac{x-\theta}{\sigma})^{۲}]^{-۱} \;,\; x \in R \;,\; \theta \in R \;,\; \sigma > ۰$

$xi)\quad f_\theta(x) = \exp\{-(x-\theta)\}[۱ + \exp\{-(x-\theta)\}]^{-۲} \;,\; x \in R$
$\theta \in R$

$xii)\quad f_\theta(x) = \frac{۲}{\theta^{۲}}(\theta - x) \;,\; ۰ < x < \theta \;,\; \theta > ۰$

$xiii)\quad f_\theta(x) = \frac{x+۱}{\theta(\theta+۱)}e^{-x/\theta} \;,\; x > ۰ \;,\; \theta > ۰$

$xiv)\quad f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{۲}} \;,\; x > \theta \;,\; \theta > ۰$

$xv)\quad f_\theta(x) = \frac{\theta}{۱-\theta}x^{\frac{۲\theta-۱}{\theta-۱}} \;,\; ۰ < x < ۱ \;,\; \frac{۱}{۲} < \theta < ۱$

$xvi)\quad f_\theta(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-\theta} - e^{-b}} \;,\; \theta < x < b \;,$ $b$ معلوم

$xvii)\quad f_\theta(x) = \frac{b\theta}{(b-\theta)x^{۲}} \;,\; \theta < x < b \;,$ $b$ معلوم

$xviii)\quad f_\theta(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-a} - e^{-\theta}} \;,\; a < x < \theta \;,$ $a$ معلوم

$xix)\quad f_\theta(x) = \frac{۱}{۱-\theta} \;,\; \theta \le x \le ۱$

$xx)\quad f_\theta(x) = (۱+\theta) + \frac{\theta}{۲\sqrt{x}} \;,\; ۰ < x < ۱ \;,\; \theta \in (۰,۱)$

$xxi)\quad f_\theta(x) = \frac{\ln\theta}{\theta-۱}\theta^{x} \;,\; ۰ < x < ۱ \;,\; \theta > ۱$

$xxii)\quad f_\theta(x) = \frac{۱}{B(\theta,\theta)}x^{\theta-۱}(۱-x)^{\theta-۱} \;,\; ۰ < x < ۱ \;,\; \theta > ۰$

$xxiii)\quad f_\theta(x) = \theta x^{\theta-۱} \;,\; ۰ < x < ۱ \;,\; \theta > ۰$

$xxiv)\quad f_\theta(x) = \frac{۱}{\theta}e^{-(x-\theta)/\theta} \;,\; x \ge \theta \;,\; \theta > ۰$

$xxv)\quad f_\theta(x) = \frac{۱}{\theta^{۲}}e^{-(x-\theta)/\theta^{۲}} \;,\; x \ge \theta \;,\; \theta > ۰$

$xxvi)\quad f_\theta(x) = e^{\theta-x} \;,\; x \ge \theta \;,\; \theta \in R$

$xxvii)\quad f_\theta(x) = \frac{۱}{۲}(۱-e^{-\theta})^{-۱}e^{-|x|} \;,\; |x| < \theta \;,\; \theta > ۰$

۷. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع زیر باشند. در هر یک از موارد زیر آمارهٔ بسندهٔ مینیمال را برای پارامتر (ها) به دست آورید.

$i)\quad X_i \sim N(i\theta, ۱) \;,\; i = ۱, \cdots, n$

$ii) \quad X_i \sim N(\alpha + \beta y_i, \sigma^2)\ ,\ i = 1, \cdots, n\ ;$

$y_1, \cdots, y_n$ مقادیر معلوم‌اند

$iii) \quad X_i \sim E(i\theta)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$iv) \quad X_i \sim P(i\theta)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$v) \quad X_i \sim E(i\theta, 1)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$vi) \quad X_i \sim E(i\theta, \lambda)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$vii) \quad X_i \sim U(-i(\theta - 1)\ ,\ i(\theta + 1))\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$viii) \quad X_i \sim \Gamma(\alpha, i\lambda)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$ix) \quad X_i \sim \Gamma(i\alpha, \lambda)\ ,\ i = 1, \cdots, n$

$x) \quad X_i \sim N(\theta, a\theta^2)\ ,\ i = 1, \cdots, n\ ;$ معلوم $a$

۸. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ را به دست آورید. $(-1 < \theta < 1)$

| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| $f_\theta(x)$ | $\frac{1-\theta}{6}$ | $\frac{1+\theta}{6}$ | $\frac{2-\theta}{6}$ | $\frac{2+\theta}{6}$ |

(راهنمایی: اگر $N_x$ ، $x = 1, \cdots, 4$ ، نمایانگر تعداد دفعاتی باشد که $x$ در نمونه مشاهده می‌شود، آن‌گاه در مورد $(N_1, \cdots, N_4)$ چه می‌توان گفت؟)

۹. کدام یک از جفت آماره‌های زیر افراز یکسان تولید می‌کنند؟ چرا؟

$$i)\ T = \Pi_{i=1}^n X_i\ ,\quad S = \sum_{i=1}^n \ln X_i\ ,\quad X_i > 0$$

$$ii)\ T = \sum_{i=1}^n X_i\ ,\quad S = \sum_{i=1}^n \ln X_i\ ,\quad X_i > 0$$

$$iii)\ T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)\ ,\quad S = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)$$

$$iv)\ T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^3)\ ,\quad S = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3)$$

۱۰. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ ، $n \geq 4$ ، یک نمونهٔ تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\theta^3} & 0 < x < \theta \\ \\ \frac{3\theta^2 - x^2}{\theta^3} & \theta \leq x < 2\theta \end{cases} \qquad \theta > 0$$

نشان دهید $T(X) = (\bar{X}, X_{(n)})$ یک آمارهٔ بسندهٔ توأم برای $\theta$ نیست.

۱۱. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n(\geq 4)$ تایی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} & 0 < x \leq \theta \\ \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta} & \theta \leq x < 1 \end{cases} \qquad 0 < \theta < 1$$

نشان دهید $T(X) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ نیست.

۱۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n(\geq 3)$ تایی از تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x-\theta|\} \ , \ x \in R \ , \ \theta \in R$$

نشان دهید $T(X) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ یک آماره بسنده برای $\theta$ نیست.

۱۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال $f_\theta(x)$ باشد. کدام یک از آماره‌های زیر بسنده است؟

$$\begin{aligned} (i) \ T(X_1, \cdots, X_n) &= X_1. \\ (ii) \ T(X_1, \cdots, X_n) &= (X_1, X_n) \\ (iii) \ T(X_1, \cdots, X_n) &= (X_1, \cdots, X_{n-1}) \end{aligned}$$

۱۴. فرض کنید $X = (X_1, X_2)$ دارای تابع احتمال زیر باشد. $(1 < \theta < 3)$

| $(x_1, x_2)$ | $(0, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 0)$ | $(1, 1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_\theta(x_1, x_2)$ | $\frac{(4-\theta)(3-\theta)}{12}$ | $\frac{\theta(4-\theta)}{12}$ | $\frac{\theta(4-\theta)}{12}$ | $\frac{\theta(\theta-1)}{12}$ |

الف: آیا $T_۱(\boldsymbol{X}) = X_۱ + X_۲$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟
ب: آیا $T_۲(\boldsymbol{X}) = X_۱ - X_۲$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟
ج: آیا $T_۳(\boldsymbol{X}) = X_۱X_۲$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟

۱۵. فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی گسسته با توابع احتمال زیر باشد.

| | $f_{\theta_۱}(x)$ | $f_{\theta_۲}(x)$ | $f_{\theta_۳}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x_۱$ | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۲ |
| $x_۲$ | ۰/۲ | ۰/۳ | ۰/۱ |
| $x_۳$ | ۰/۴ | ۰/۱ | ۰/۷ |

الف: اگر $A = \{x_۳\}$ و $B = \{x_۱, x_۲\}$، آیا افراز $\Pi = \{A, B\}$ بسنده است؟

ب: اگر $T(x) = \begin{cases} ۰ & x = x_۱ \\ ۱ & x = x_۲ \text{ یا } x_۳ \end{cases}$، آیا آماره $T(X)$ بسنده برای $\theta$ است؟

۱۶. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x) = a(x)\frac{\theta^x}{g(\theta)} \;,\; x = ۰, ۱, ۲, \cdots \;,\; \theta > ۰$$

الف: آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ را به دست آورید.
ب: آیا آمارهٔ به دست آمده کامل است؟

۱۷. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $Y_۱, \cdots, Y_m$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $N(\mu, \sigma_۱^۲)$ و $N(\mu, \sigma_۲^۲)$ باشند. نشان دهید آمارهٔ $T = (\Sigma X_i, \Sigma X_i^۲, \Sigma Y_i, \Sigma Y_i^۲)$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta = (\mu, \sigma_۱^۲, \sigma_۲^۲)$ است اما کامل نیست.

۱۸. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $Beta(\alpha, \beta)$ باشد که در آن $\alpha$ معلوم و $\beta$ نامعلوم است. نشان دهید آماره $T \equiv \frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^n \ln \frac{۱}{۱-X_i})^۴$ یک آمارهٔ بسنده برای $\beta$ است.

۱۹. فرض کنید $X_۱, X_۲$ یک نمونهٔ تصادفی ۲ تایی از توزیع $P(\lambda)$، $\lambda > ۰$، باشد. با استفاده از تعریف بسندگی تحقیق کنید، آیا آمارهٔ $T(\boldsymbol{X}) = X_۱ + \alpha X_۲$، به

ازاء هر $\alpha > ۱$ صحیح، بسنده است یا نه؟ آیا روش ساده‌تری برای نشان دادن عدم بسندگی $T$ وجود دارد؟

۲۰. فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ یک نمونهٔ تصادفی ۳ تایی از توزیع $B(۱,\theta)$ باشد. تحقیق کنید الف: آیا $T_۱(\boldsymbol{X}) = X_۱ + X_۲ + ۲X_۳$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟ چرا؟

ب: آیا $T_۲(\boldsymbol{X}) = X_۱ + ۲X_۲ + ۲X_۳$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟ چرا؟

ج: آیا $T_۳(\boldsymbol{X}) = ۳X_۱ + ۲X_۲ + ۲X_۳$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟ چرا؟

د: آیا $T_۴(\boldsymbol{X}) = ۵X_۱ + X_۲ + X_۳$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است؟ چرا؟

ه) در صورت مثبت بودن جواب در هر یک از بندهای الف- د، تحقیق کنید آیا آمارهٔ بسنده، مینیمال هم است؟ آیا می‌توان در حالت کلی ادعا کرد که چه ترکیب خطی از $X_i$ها یک آمارهٔ بسنده است؟

۲۱. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $Y_۱, \cdots, Y_n$ دو نمونهٔ تصادفی مستقل از توزیعهای به ترتیب $E(\theta)$ و $E(\frac{۱}{\theta})$ باشند. یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ به دست آورید. آیا آمارهٔ به دست آمده کامل است؟

۲۲. فرض کنید $(X_۱, Y_۱), \cdots, (X_n, Y_n)$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(۰, ۰, ۱, ۱, \rho)$ باشد. یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال با کمترین بعد برای $\rho$ به دست آورید.

۲۳. فرض کنید $X \sim U(\theta, \theta + ۱)$ ، $\theta \in \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ ، باشد. نشان دهید

الف: $T(X) = [X]$ یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ است.

ب: $T(X)$ و $X$ مستقل از هم هستند.

۲۴. فرض کنید $(X_۱, X_۲)$ یک متغیر تصادفی دوبعدی باشد اگر $X_۱ \sim B(۱,p)$ ، $X_۲|X_۱ = ۱ \sim B(۱,p)$ ، $X_۲|X_۱ = ۰ \sim B(۱, \frac{۱}{۲})$ ، $p \in (۰, ۱)$ ، باشند، یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $p$ به دست آورید.

۲۵. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد.

$$P(X_j = z_i) = p_i \ , \ i = ۱, \cdots, k \ , \ j = ۱, \cdots, n \ , \ p_i \in [۰, ۱] \ , \ \sum_{i=۱}^{k} p_i = ۱$$

یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $(p_۱, \cdots, p_k)$ به دست آورید.

۲۶. فرض کنید $(X,Y)$ دارای تابع احتمال به شکل زیر باشد

$$p_\theta(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}(\theta^{۲})^x(۲\theta(۱-\theta))^y((۱-\theta)^{۲})^{n-x-y}$$

$$x,y = ۰,۱,\cdots,n \quad , \quad x+y \leq n$$

الف: نشان دهید $T = ۲X+Y$ یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ است.

ب: آیا آمارهٔ $T$ کامل است؟

۲۷. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{g(x)}{h(\theta)} \quad , \quad a(\theta) < x < b(\theta) \quad ; \quad \theta \in \Theta$$

الف: اگر $a(\theta)$ و $b(\theta)$ توابع صعودی از $\theta$ باشند، یک آمارهٔ بسنده با کمترین بعد برای $\theta$ به دست آورید.

ب: اگر $a(\theta)$ تابعی صعودی و $b(\theta)$ تابعی نزولی از $\theta$ باشند، یک آمارهٔ بسنده با کمترین بعد برای $\theta$ به دست آورید.

۲۸. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. در هر حالت، یک آمارهٔ بسنده برای $\theta$ به دست آورید.

$$(i) \quad f_\theta(x) = (\frac{x}{\theta})^{\theta A'(\theta)} \exp\{A(\theta)+B(x)\}$$

$$(ii) \quad f_\theta(x) = \exp\{\frac{۱}{x}[\theta A'(\theta) - A(\theta)] - A'(\theta) + B(x)\}$$

۲۹. فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد. $۰ < \theta < \frac{۱}{۲}$

| $x$ | $-۱$ | $۰$ | $۱$ |
|---|---|---|---|
| $f_\theta(x)$ | $\theta$ | $۱-۲\theta$ | $\theta$ |

الف: آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ کدام است؟

ب: آیا $X$ یک آمارهٔ کامل برای $\theta$ است؟

ج: آیا آمارهٔ به دست آمده در الف کامل است؟

۳۰. فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $U(-\theta,\theta)$ باشد. یک آمارهٔ بسندهٔ مینیمال برای $\theta$ به دست آورید. آیا آمارهٔ به دست آمده کامل است؟ چرا؟

۳۱. خانوادهٔ توزیعهای $\{B(\theta, \frac{1}{2}) : \theta \in \Theta\}$ را در نظر گیرید. در هر یک از حالات زیر نشان دهید که خانوادهٔ توزیعهای تعیین شده کامل نیست و کلاس براوردگرهای نااریب صفر را به دست آورید.

الف: $\Theta = \{0, 2, 3, \cdots\}$

ب: $\Theta = \{0, 1, 3, \cdots\}$

ج: $\Theta = \{0, 1, 2, 4, \cdots\}$

د: با توجه به سه مورد فوق، آیا می‌توانید کلاس براوردگرهای نااریب صفر را برای حالت $\Theta - \{n\}$ حدس بزنید؟

۳۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ باشد. با تعریف $M_n = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ و $R_n = (X_{(n)} - X_{(1)})$، نشان دهید آمارهٔ $(M_n, R_n)$ مستقل از بردار $(\frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1}, \cdots, \frac{X_{n-1} - X_1}{X_n - X_1})$ است.

۳۳. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$، $\mu \in R$ و $\sigma > 0$، باشد. با تعریف $T_1(\boldsymbol{X}) = \bar{X}$ و $T_2(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n a_i X_i$، $\sum_{i=1}^n a_i = 0$، نشان دهید $T_1$ و $T_2$ مستقل از هم هستند.

۳۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(0, 1)$ باشند. نشان دهید $\bar{X}$ و $X_{(n)} - X_{(1)}$ مستقل از هم هستند.

۳۵. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $U(0, 1)$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ $E(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}})$ و $E(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{X_{(n)}})$

۳۶. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $Beta(\theta + 1, 1)$ باشد. مطلوب است محاسبهٔ $E[\frac{\ln X_1}{\Sigma \ln X_i}]$.

۳۷. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $E(\lambda)$ باشد. با تعریف $T = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$، $Q = \frac{X_1 - X_2}{X_1 + X_2}$، $R = \frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ و $F = \frac{X_1}{X_2}$، نشان دهید جفت آماره‌های $T$ و $\sum_{i=1}^n X_i$، $Q$ و $\sum_{i=1}^n X_i$، $R$ و $\sum_{i=1}^n X_i$، $F$ و $\sum_{i=1}^n X_i$ مستقل از هم هستند.

۳۸. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $E(\mu, \sigma)$ باشد.

الف: نشان دهید آماره‌های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ مستقل از هم هستند.

ب: مقدار $E(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})})$ را به دست آورید.

۳۹. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $P_a(\alpha, \beta)$ باشد. نشان دهید آماره‌های $X_{(1)}$ و $\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{X_i}{X_{(1)}}$ مستقل از هم هستند.

۴۰. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. نشان دهید $\bar{X}$ و $\boldsymbol{X}'A\boldsymbol{X}$ مستقل از هم هستند اگر و فقط اگر $A\mathbf{1} = 0$، که در آن $\mathbf{1}$ بردار ستونی با مؤلفه‌های یک است.

۴۱. فرض کنید $X_1, X_2, \cdots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$، $i = 1, 2, \cdots$ باشد. اگر برای $i = 1, 2, \cdots$، $T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ و $Y_i = \frac{T_i}{T_{i+1}}$، نشان دهید برای هر $n \geq 2$، متغیرهای تصادفی $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ و $T_n$ مستقل از هم هستند.

۴۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. اگر $M = median(X_1, \cdots, X_n)$، نشان دهید $\bar{X}$ و $M - \bar{X}$ مستقل از هم هستند.

۴۳. در مثال ۲ـ۳۸، آیا آمار بسنده مینیمال به دست آمده کامل است؟ آیا می‌توان تابعی یک به یک از آماره بسندهٔ مینیمال به دست آمده تعریف کرد که مؤلفه‌های آن مستقل از هم باشند؟

۴۴. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع زیر باشد. در هر یک از موارد زیر آمارهٔ بسندهٔ مینیمال توأم برای پارامترهای مجهول را به دست آورید

$$
\begin{array}{ll}
i) & U(\mu - \sigma, \mu + \sigma) \; ; \; \mu \in R \; , \; \sigma > 0 \\
ii) & U(\theta_1, \theta_2) \; ; \; -\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty \\
iii) & \Gamma(\alpha, \beta) \; ; \; \alpha > 0 \; , \; \beta > 0 \\
iv) & Beta(\alpha, \beta) \; ; \; \alpha > 0 \; , \; \beta > 0 \\
v) & IG(\mu, \lambda) \; ; \; \mu > 0 \; , \; \lambda > 0 \\
vi) & C(\theta, \sigma) \; ; \; \theta \in R \; , \; \sigma > 0 \\
vii) & LN(\mu, \sigma^2) \; ; \; \mu \in R \; , \; \sigma > 0 \\
viii) & E(\mu, \lambda) \; ; \; \mu \in R \; , \; \lambda > 0
\end{array}
$$

۴۵. فرض کنید $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ یک نمونهٔ تصادفی $n$ تایی از توزیع $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ باشد.

الف) آمارهٔ بسندهٔ مینیمال توأم برای پارامترهای مجهول را به دست آورید.

ب) اگر $\mu_۲ = \mu_۱$ باشد، آمارهٔ بسندهٔ مینیمال توأم برای پارامترهای مجهول را به دست آورده، نشان دهید که کامل نیست.