

# تمرینات احتمال ۱

سری دوم

۱- اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_x(x) = \begin{cases} cx^2 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار ثابت  $c$  را به دست آورید

ب- تابع توزیع  $X$  را به دست آورید

ج- مقادیر  $P(-1 < X < 1)$  ،  $P(0 < X < 1)$  ،  $P(-1 < X \leq \frac{1}{2})$  ،  $P(X = \frac{1}{2})$  و  $P(-1 < X \leq \frac{1}{2})$  را به دست آورید

۲- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال

$$f_x(x) = \begin{cases} cx e^{-\frac{x}{2}} & ; x > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

ب،

الف- مقدار ثابت  $c$  را به دست آورید

ب- مقدار  $P(X > 5)$  را به دست آورید

۳- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_x(x) = \begin{cases} x+1 & ; -1 < x \leq 0 \\ 1-x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

تابع توزیع  $X$  را به دست آورید.

۴- فرض کنید  $g(x) = \begin{cases} x(1-x^2) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$  ، آیا  $g$  تابع چگالی احتمال است؟

در چه صورت تابع چگالی احتمال خواهد بود؟

۵- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_x(x) = \begin{cases} 4x(1-x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) میانگین و واریانس  $X$  را به دست آورید

ب) مقدار  $P(|X - \mu_x| < 2\sigma_x) = ?$  را به دست آورید

۶- شخصی از فرضی مسائل ۲، ۳ و ۴ دو کوپه به تصادف در بدون جایگزینی خارج می‌کند.  
فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  عبارت باشد از تعداد کوپه های قرمز خارج شده. مقدار امید ریاضی  $X$  را بیابید.

۷- تابع چگالی احتمال توکم متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  بصورت زیر است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda xy^2 & ; 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار ثابت  $\lambda$  را بدست آورید.  
ب) توابع چگالی احتمال حاشیه ای  $X$  و  $Y$  را بدست آورید.

۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  در این تابع چگالی احتمال توکم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & ; \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 3 \end{matrix} \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه مقدار  $P(|X-Y| > 1.5) = ?$

۹- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند.  
الف) نشان دهید  $X-Y$  و  $X+Y$  ناهمبسته اند (یعنی کوواریانس شان صفر است) اگر و فقط اگر  $Var(X) = Var(Y)$ .

ب) نشان دهید  $Cov(X, X+Y) = EY \cdot Var(X)$ .

۱۰- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  در این تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

فرض کنید  $Y = X^2$ .

مطلوب است  
الف) کوواریانس  $X$  و  $Y$   
ب) ضرب همبستگی  $X$  و  $Y$